Norm- und Massenberechnung skalarer Bosonen als Bindungszustände in einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldmodellen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Bernhard Hailer
aus Balingen

1985

Norm- und Massenberechnung skalarer Bosonen als Bindungszustände in einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldmodellen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Bernhard Hailer
aus Balingen

1985

Tag der mündlichen Prüfung:	18. Dezember 1985
Dekan:	Prof. Dr. H. Ruder
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. Stumpf
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. P. Kramer

Abstract

HAILER, BERNHARD:

NORM- UND MASSENBERECHNUNG SKALARER BOSONEN ALS BINDUNGSZUSTÄNDE IN EINHEITLICHEN NICHTLINEAREN SPINORFELDMODELLEN

Einheitliche nichtlineare Spinorfeldmodelle sind Quantenfeldtheorien, in denen alle beobachtbaren (Elementar-)Teilchen als Bindungszustände elementarer Fermionenfelder betrachtet werden. Diese sogenannten Preonenfelder sind in solchen Modellen unter anderem aufgrund ihrer sehr hohen Massen unbeobachtbar. Ausgehend von der Fundamentalgleichung erster Ordnung für ein achtkomponentiges Spinorfeld (Diracspinor und Isospinor) mit skalarer Vierfermionen-Wechselwirkung wird ein renormierbares Gleichungssystem abgeleitet. Dieses Gleichungssystem entspricht einer Feldgleichung zweiter Ordnung und führt zu einer Verdopplung der Spinorfeldkomponenten und zu Zuständen mit negativer Norm. Die Norm kann als Produkt von Links- und Rechtslösung der renormierten Energiegleichung geschrieben werden. Im Rahmen der funktionalen Quantentheorie werden relativistische Bindungszustände als Lösungen des Diagonalanteils der Energiegleichung definiert, und der Ausdruck für die Norm kann im Funktionalraum reproduziert werden. Mittels einer Transformation und Entwicklung der Wellenfunktionen nach Lösungen der freien Diracgleichung findet man als Resultat eine positive Norm für den Zweiteilchenbindungszustand TT beziehungsweise VV. Hierbei wurden richtungs- und spinabhängige Terme vernachlässigt. Trotz der sehr großen Massenparameter für die Preonenfelder können in dem vorliegenden Modell bei endlicher Kopplungskonstante kleine Massen als Eigenwerte erzeugt werden.

INHALTSVERZEICHNIS

1.	Einleitung	1
2.	Grundlagen	7
2.1	Bezeichnungen	7
2.2	Fundamentalgleichung erster Ordnung	10
2.3	Quantisierung	16
2.4	Renormierbarkeit	21
2.5	Darstellung der Poincarégruppe im Zustandsraum	27
2.6	Norm von Eigenzuständen	31
3.	Funktionalraum	40
3.1	Grundlagen	41
3.2	Feldgleichung und Eigenwertgleichung	46
3.3	Normaltransformation	50
3.4	Das innere Produkt	53
4.	Zweiteilchensektor	57
4.1	Diagonalanteil der Eigenwertgleichung	58
4.2	Transformation der Operatoren j_I und ∂_I	61
4.3	Projektion	66
4.4	TT-Zustand. Entwicklung nach Diracspinoren	75
4.5	Schwerpunktsystem	87
4.6	Linkslösung	93
4.7	Norm des Zustands TT	111
4.8	Energieeigenwert des Zustands TT	124
5.	Zusammenfassung und Ausblick	129
Anhang		
A.	Normierung von Diracspinoren. Formeln zu Abschnitt 4.4	133
B.	Zweipunktfunktion	137
Literaturverzeichnis		143

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546524_0008

1. EINLEITUNG

Die Erforschung von Aufbau und Eigenschaften der Materie führte in der Physik zur Entdeckung von immer kleineren "Mikrowelten" und Substrukturen und damit zur Frage nach den fundamentalen Bausteinen unserer Welt. Mit Hilfe der neu entdeckten Substrukturen oder Elementarteilchen konnten die Eigenschaften der zuvor elementaren, dann aber komplexen Objekte erklärt und verstanden werden.

Am Anfang dieser Geschichte der Substrukturen steht die Theorie und die Entdeckung der Atome. Während dieser erste Schritt von der spekulativen Theorie bis zur wissenschaftlichen Entdeckung über 2000 Jahre dauerte, erfolgte die weitere Entwicklung, die hier nur stichwortartig aufgezählt werden soll, in unserem Jahrhundert mit großer Geschwindigkeit. Hierzu gehört die Entdeckung, daß Atome nicht unteilbar sind, sondern aus einer Elektronenhülle und einem dicht gepackten Kern bestehen. Der Kern wiederum ist aus Protonen und Neutronen aufgebaut. In den letzten Jahren schließlich wurden durch die Entdeckung der Quarks als Konstituenten von Proton und Neutron und die Einführung des $SU_3 \times SU_2 \times U_1$-Standardmodells große Erfolge in der Elementarteilchen- und Kernphysik erzielt.
Es stellt sich die Frage, ob wir damit die Grundbausteine der Materie gefunden haben. Gibt es überhaupt diese Grundbausteine, und wenn ja, können wir hierfür ein (theoretisches) Kriterium angeben? Oder ist einfach das experimentelle "Nichtfinden" von neuen Teilchen das Kriterium?

Ein bevorzugtes Kriterium für ein fundamentales Gesetz in der Physik ist neben der Übereinstimmung mit dem Experiment, daß ein solches Gesetz eine einfache Struktur aufweisen sollte. Der Übergang zu Substrukturen führt im allgemeinen zwar nicht zu einer rechentechnischen Vereinfachung der Theorie - so werden ja bisher "einfache" Probleme zu Vielteilchenproblemen -, doch sollte eine strukturell einfachere und besser durchschaubare Theorie erwartet werden. Das $SU_3 \times SU_2 \times U_1$-Standardmodell enthält

mehr als 20 Parameter und mindestens 37 Elementarteilchen, darunter skalare Bosonen, Vektorbosonen und Spin-$\frac{1}{2}$-Fermionen. Auch erklärt das Standardmodell nicht, warum Leptonen und Quarks 3 Familien mit identischer Struktur, aber verschiedenen Massen bilden. Für eine weitere Kritik des Standardmodells sei auf <1,2> verwiesen.

Wenn aus diesen Gründen Zweifel daran bestehen, daß das Standardmodell die fundamentale Theorie der Elementarteilchen ist, so bietet sich eine Theorie an, in der zumindest manche oder auch alle Elementarteilchen des Standardmodells Bindungszustände von "fundamentaleren" Teilchen oder Feldern sind. Vorschläge, daß auch Quarks nicht elementar, sondern zusammengesetzte Teilchen seien, gab es schon bald nach Einführung des Quarkmodells. So diskutierten zum Beispiel 1968 HAYASHI et al. <3> die Möglichkeit, daß Quarks Leptonen enthalten könnten. Andererseits wurde bereits 1966 der Vorschlag gemacht, daß Leptonen nicht punktförmig seien. In Analogie zu den Hadronen sollten sie ebenfalls eine Substruktur aufweisen und aus leptonischen Quarks bestehen <4>. Es waren GREENBERG und NELSON <5>, die untersuchten, ob Leptonen hadronische Quarks enthalten. Auch PATI und SALAM <6> machten den Versuch, die Theorie der Quarks und der Leptonen zu vereinheitlichen. Sie schlugen vor, die Leptonenzahl als "vierte Farbe" der Quarks zu betrachten. Für die Geschichte der verschiedenen Präquarkmodelle und der Versuche, die Theorie der Leptonen und Baryonen zu vereinheitlichen, verweisen wir auf den Übersichtsartikel von LYONS <7>.

Erwähnt werden soll jedoch noch das von HARARI <2> und SHUPE <8> vorgeschlagene Modell, das durch seine Radikalität und Einfachheit besticht. In diesem Modell werden alle Leptonen und Quarks -und zumindest manche der Eichbosonen, welche die Wechselwirkung vermitteln- aus zwei fundamentalen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen aufgebaut. Im Gegensatz zu den früheren Präquarkmodellen haben diese Preonen, die von HARARI Rishonen genannt werden, weder Farbe noch Flavour; ein Preon trägt die Ladung $+\frac{1}{3}e$ (e=Ladung des Positrons), das andere ist neutral.

Die Idee, aus elementaren Fermionen zusammengesetzte relativistische Teilchen und insbesondere auch zusammengesetzte Bosonen zu konstruieren, ist jedoch bedeutend älter als Quarkphysik und die nachfolgenden Preonenmodelle. So nahm DE BROGLIE <9> an, das Photon sei aus zwei Neutrinos aufgebaut. FERMI und YANG <10> machten den Vorschlag, das Pion sei ein Nukleon-Antinukleon-Bindungszustand. In HEISENBERGs einheitlicher Theorie der Elementarteilchen <11> sind schließlich alle Bosonen Bindungszustände von elementaren relativistischen Fermionenfeldern. Diese Fermionenfelder beschreiben nicht bestimmte (Elementar-)Teilchen, sondern sie beziehen sich auf Materie im allgemeinen <12>.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir ein einheitliches nichtlineares Spinorfeldmodell, das heißt eine Quantenfeldtheorie, in der alle beobachtbaren Teilchen als Bindungszustände fundamentaler Fermionenfelder betrachtet werden <22>. Auch die Elementarteilchen des Standardmodells sind in diesem Modell also nicht mehr "elementare", sondern zusammengesetzte Teilchen. In Verschärfung von HEISENBERGs Vorstellung sollen die elementaren Felder unter anderem infolge extrem hoher Preonenmassen unbeobachtbar sein und nur bestimmte Bindungszustände eine physikalische Bedeutung besitzen. Diese Theorie liefert zwar nicht die Antwort auf die Frage, wo die Kette der Substrukturen beginnt (oder wo ihre Geschichte enden wird), doch sollte das Konzept von unbeobachtbaren Fundamentalfeldern in der Lage sein, gegebenenfalls auch weitere Substrukturen zu erklären.

Die einfachste Lorentzinvariante Wechselwirkung ist bereits ein Produkt aus vier Spinorfeldern beziehungsweise Spinorfeldoperatoren, und somit ist die Theorie im Falle kanonischer Quantisierung nicht renormierbar, wenn der freie Anteil der Lagrangedichte nur Ableitungen erster Ordnung enthält. Trotz dieses schwerwiegenden Nachteils wurden Spinorfeldgleichungen erster Ordnung von vielen Autoren untersucht, und mit Hilfe verschiedener Regularisierungsverfahren sollten diese Modelle eine physikalische und mathematische Bedeutung erhalten. Die Verwendung einer nichtkanonischen Quantisierungsvorschrift führte zum Beispiel in HEISENBERGs einheitlicher Feldtheorie zu einer Regularisierung durch Dipolgeister.

Eine andere Möglichkeit, eine renormierbare Theorie zu erhalten, besteht in der Verwendung von Feldgleichungen mit Ableitungen höherer Ordnung. Die regularisierende Wirkung von Feldgleichungen höherer Ordnung im Rahmen einer verallgemeinerten Elektrodynamik wurde 1940 von BOPP <13> erkannt. Dieselbe Feldgleichung wurde auch von LANDE und THOMAS <14> und PODOLSKI <15> vorgeschlagen. 1950 untersuchten PAIS und UHLENBECK <16> und WILDERMUTH <17> Spinorfeldgleichungen höherer Ordnung. Literaturhinweise zu weiteren Feldtheorien höherer Ordnung, die in den Jahren 1949 bis 1962 behandelt wurden, sind bei NAGY <18> zu finden. STUMPF und Mitarbeiter untersuchten dann vor allem Gleichungen dritter Ordnung für verschiedene skalare und spinorielle Felder; für die Literatur hierzu wird auf STUMPF <19> verwiesen. GROSSER und LAUXMANN <20> schlugen 1982 ein Rishonenmodell mit Vierfermionen-Wechselwirkung vor, und um die Renormierbarkeit des Modells zu gewährleisten, verwendeten sie eine Lagrangedichte mit Ableitungen zweiter Ordnung.
Jedoch sowohl die Regularisierung einer Gleichung erster Ordnung durch Dipolgeister als auch die Verwendung von Feldgleichungen höherer Ordnung führt zu Problemen: der zugehörige Zustandsraum enthält Zustände mit "negativer Norm", und dadurch wird die in der Quantenmechanik übliche Wahrscheinlichkeitsinterpretation zunächst in Frage gestellt <18>. Für solche Theorien muß also jeweils nachgeprüft werden, daß die "physikalischen" Zustände eine positive Norm besitzen.

Nachfolgend geben wir einen kurzen Überblick über die in der vorliegenden Arbeit behandelte einheitliche Feldtheorie. Ausgangspunkt ist eine Lagrangedichte mit Ableitungen erster Ordnung und einer skalaren Vierfermionen-Wechselwirkung für ein Preonenfeld mit Isospin. Der kanonische Formalismus liefert die Hamiltonfunktion und die zugehörige nichtrenormierbare Feldgleichung erster Ordnung. Nach STUMPF <21> kann man aus einer äquivalenten Hamiltonfunktion ein System von zwei Feldgleichungen erster Ordnung ableiten, welches einer renormierbaren Feldgleichung zweiter Ordnung entspricht. Diese Äquivalenz wurde von STUMPF <22> und GROSSER <23> für nichtlineare Spinorfeldgleichungen höherer Ordnung bewiesen.
Nach einer kurzen Diskussion des Zustandsraumes erfolgen die

weiteren Rechnungen im Rahmen der funktionalen Quantentheorie, die von STUMPF <24> vorgeschlagen und weiterentwickelt wurde. Diese Theorie gestattet eine explizite, relativistisch invariante Zustandsbeschreibung und ist sowohl für kanonische als auch nichtkanonische Quantisierungsverfahren geeignet. Besonders wichtig für die Behandlung einer einheitlichen Feldtheorie, in der nur Mehrteilchen-Bindungszustände eine physikalische Bedeutung haben, ist jedoch, daß im Rahmen der funktionalen Quantentheorie von STUMPF der Begriff des "relativistischen Cluster" eingeführt wurde. In der Kernphysik wird das von WILDERMUTH und Mitarbeitern <25> entwickelte Cluster-Modell erfolgreich angewendet, und so zeigt sich hier ein Berührungspunkt von Elementarteilchen- und Kernphysik. Die gruppentheoretischen Aspekte der Wechselwirkung von zusammengesetzten Nukleonen-Systemen wurden unter anderem von KRAMER und Mitarbeitern <26> untersucht.

Aufgrund der Zerlegung einer renormierbaren Gleichung höherer Ordnung in ein Gleichungssystem erster Ordnung <22,23> kann für Bindungszustände eine Schrödingerartige funktionale Eigenwertgleichung abgeleitet werden. Diese Eigenwertgleichung enthält keine Ableitungen mehr nach der Zeit, und deshalb kann der Grenzübergang zu gleichen Zeiten und damit zur "einzeitigen" Theorie durchgeführt werden. Von MAISON und STUMPF <27> wurden einzeitige symmetrisierte τ-Funktionen für funktionale Berechnungen des anharmonischen Oszillators eingeführt; entsprechend muß für eine Spinortheorie dieser Grenzübergang so erfolgen, daß die einzeitigen τ-Funktionen antisymmetrisch sind. Die eben geschilderte Methode zur Berechnung von Bindungszuständen wurde in <1> ausführlich dargestellt.

Es hat nun den Anschein, als ob wir damit eine Theorie zur Verfügung hätten, die nur die Vorteile einer Theorie erster Ordnung und einer renormierbaren Theorie höherer Ordnung miteinander verbindet. Doch es zeigen sich auch hier die "negativen Folgen" der renormierbaren Theorie im Auftreten von Zuständen mit "negativer Norm".
Untersuchungen zur Norm in einheitlichen Feldtheorien mit "indefiniter Metrik" (besser: mit nicht positiv definitem inneren Produkt) wurden von STUMPF <24d,28> durchgeführt.

Die Berechnung des Skalarprodukts scheitert üblicherweise daran, daß zur Bestimmung des metrischen Fundamentaltensors die Theorie vollständig gelöst werden muß. STUMPF <29> zeigte, daß das innere Produkt von Zuständen mit Hilfe der Links- und Rechtslösungen der zugehörigen Funktionalgleichungen geschrieben werden kann, und konnte damit nachweisen, daß der Zweiteilchensektor des Modells unterhalb der Energieschwelle für Preonenproduktion oder Preonenaufbruchreaktionen eine vernünftige physikalische Interpretation erwarten läßt <30>.
Es folgten Untersuchungen über die effektive Wechselwirkung von zusammengesetzten relativistischen Teilchen und den Zusammenhang mit phänomenologischen Kopplungstheorien <31>.

In der vorliegenden Arbeit wird der Zweiteilchensektor des oben geschilderten einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldmodells untersucht. Vor allem zwei Fragen sind hierbei interessant und wichtig:

1. Gestattet das Modell eine quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsinterpretation?
2. Durch extrem hohe Werte für die Massenparameter wird unter anderem das Confinement der nichtbeobachtbaren Preonenfelder und Teilchen garantiert. Erhalten wir trotz dieser hohen Massen vernünftige, das heißt in Relation zu den Massenparametern kleine Werte für die Massen der Bindungszustände?

Um diese Fragen zu beantworten, werden wir eine Entwicklung der Wellenfunktionen nach Dirac-Spinoren vornehmen. Mit Hilfe der von STUMPF <30> eingeführten Transformationen der funktionalen Vernichter und Erzeuger können wir dann die dort formale Auflösung des Gleichungssystems explizit durchführen, und unter noch zu diskutierenden Näherungen erhalten wir eine positive Antwort auf die gestellten Fragen.

2. GRUNDLAGEN

In diesem Kapitel werden die verwendete Notation und die Grundlagen des physikalischen Modells dargestellt. Wir beginnen mit einer Spinorgleichung erster Ordnung beziehungsweise der zugehörigen Lagrangedichte erster Ordnung und betrachten als einfachste Wechselwirkung eine skalare Vierfermionen-Wechselwirkung. Aus Gründen der Renormierbarkeit sind wir andererseits an einer Feldgleichung interessiert, die Ableitungen von mindestens zweiter Ordnung enthält. Ein Zusammenhang zwischen der nichtrenormierbaren Fundamentalgleichung erster Ordnung und einer renormierbaren Feldgleichung zweiter Ordnung wurde von STUMPF <21> aufgezeigt: die beiden Gleichungen besitzen äquivalente Hamiltonfunktionen. Die Äquivalenz der klassischen Hamiltonfunktionen wird jedoch durch die Quantisierung gebrochen. Bereits die zugehörigen Lagrangefunktionen sind nicht äquivalent, und wir gelangen zu einem System zweier gekoppelter Feldgleichungen erster Ordnung. Dieses System nichtlinearer Gleichungen entspricht in eineindeutiger Weise einer renormierbaren, nichtlinearen Gleichung zweiter Ordnung <22,23>. So sichert uns die dem Modell zugrunde liegende Feldgleichung höherer Ordnung die Renormierbarkeit der Theorie, ohne daß wir die aus physikalischen Gründen bevorzugte Gleichung erster Ordnung ganz aufgeben müssen. Desweiteren enthält dieses Kapitel einen Überblick über wichtige Eigenschaften des Zustandsraums.

2.1 Bezeichnungen

Wir verwenden das in der Quantenfeldtheorie übliche natürliche Einheitensystem mit

$$\hbar = c = 1.$$

Alle Dimensionsangaben sind auf die Masse bezogen, so bedeutet zum Beispiel

$$\dim g = 1, \text{ daß } [g] = [m^1].$$

Ein Raum-Zeit-Punkt des Minkowskiraums hat die kontravarianten Koordinaten

$$x^\mu = (x^o, x^i) = (x^o, x^1, x^2, x^3) = (x^o, \vec{x}) \quad \text{mit } x^o = t.$$

Griechische Indizes $\mu, \nu, \ldots$ gehen hierbei in der Regel von 0 bis 3, lateinische Indizes $i, j, \ldots$ von 1 bis 3.
$g_{\mu\nu}$ bezeichnet den metrischen Fundamentaltensor, er ist gegeben durch

$$g_{oo} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$$

und

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

Mit Hilfe des metrischen Fundamentaltensors können wir kovariante Koordinaten einführen:

$$x_\mu = \sum_{\nu=o}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu$$

Es gilt also

$$x_\mu = (x_o, x_1, x_2, x_3) = (x^o, -\vec{x})$$

und

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \qquad g_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu := \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}.$$

Mit $[O_1, O_2]$ bezeichnen wir den Kommutator zweier Operatoren O_1 und O_2:

$$[O_1, O_2] := O_1 O_2 - O_2 O_1$$

Entsprechend ist $\{O_1, O_2\}$ der Antikommutator:

$$\{O_1, O_2\} := O_1 O_2 + O_2 O_1$$

Die Diracmatrizen γ^μ ($\mu = 0, \ldots, 3$) erfüllen die Antivertauschungsrelationen (AVR)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}.$$

Eine explizite Darstellung dieser Matrizen ist im Anhang A angegeben.
Die Komponenten eines Spinors Ψ und die Komponenten der Diracmatrizen γ^μ werden ebenfalls mit griechischen Indizes bezeichnet:

$\Psi_\alpha \qquad (\alpha = 1,2,3,4)$

$\gamma^\mu_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3,4)$

Der adjungierte Spinor $\overline{\Psi}$ ist durch $\overline{\Psi}_\alpha := \Psi^+_\beta \gamma^0_{\beta\alpha}$ definiert.

Um Schreibarbeit zu sparen und die Formeln übersichtlich zu gestalten, werden wir vor allem die spinoriellen Indizes $\alpha,\beta,\ldots$ und gegebenenfalls auch weitere Indizes oft weglassen.
Aus denselben Gründen wollen wir uns an die Einsteinsche Summationskonvention halten: über doppelt vorkommende (diskrete) Indizes wird - sofern nicht anders angegeben - stets summiert. Teilweise werden wir auch verschiedene Indizes und Variablen, das heißt "kontinuierliche Indizes", zu einem neuen Gesamtindex zusammenfassen. Kommen solche Indizes in einer Gleichung mehrfach vor, so ist über jeden Teilindex entsprechend seinem Wertebereich zu summieren und über jede Variable (üblicherweise von $-\infty$ bis $+\infty$) zu integrieren.

Vierdimensionale Integrale $\int d^4x$ bezeichnen wir der Einfachheit halber mit $\int dx$, und für dreidimensionale Integrale schreiben wir $\int d^3x$ oder $\int d\vec{x}$.

Die meisten Definitionen und Bezeichnungen erfolgen im übrigen in enger Anlehnung an <1> und werden im Text erklärt.

2.2 Fundamentalgleichung erster Ordnung

HEISENBERG und PAULI <32,33> machten 1958 den Vorschlag, die folgende Differentialgleichung erster Ordnung für einen vierkomponentigen Spinorfeldoperator $\Psi(x)$ als Grundlage für eine einheitliche Theorie der Elementarteilchen zu nehmen:

$$\gamma_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} \pm l^2 \gamma_\mu \gamma_5 \Psi \left(\overline{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi \right) = 0 \qquad (2.1)$$

Diese Gleichung ist unter anderem invariant gegenüber der Paritätstransformation

$$\Psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \gamma_0 \Psi(t, -\vec{x}) \qquad (2.2)$$

und der Touschektransformation

$$\Psi(x) \longrightarrow e^{i \alpha \gamma_5} \Psi(x) , \qquad (2.3)$$

jedoch sind die beiden Transformationen nicht miteinander vertauschbar <34>.
Da in HEISENBERGs Theorie der Elementarteilchen die Touschektransformation mit der Baryonenzahl zusammenhängt, wurden HEISENBERG und Mitarbeiter <34,35> zur Definition einer "Parität zweiter Art" und zu einer Verdopplung der Komponenten des Feldoperators, also zu einer Gleichung für einen achtkomponentigen Spinoroperator geführt.

In Analogie hierzu gehen wir von der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) = i \, \overline{\Phi}_{A\alpha}(x) \, I_{AB} \, \gamma^\mu_{\alpha\beta} \, \partial_\mu \, \Phi_{B\beta}(x) \qquad (2.4)$$

$$- f \left[\overline{\Phi}_{A\alpha}(x) \, I_{AB} \, \delta_{\alpha\beta} \, \Phi_{B\beta}(x) \right] \left[\overline{\Phi}_{C\gamma}(x) \, I_{CD} \, \delta_{\gamma\delta} \, \Phi_{D\delta}(x) \right]$$

für ein achtkomponentiges Spinorfeld $\Phi(x) = \Phi_{A\alpha}(x)$ $(A=1,2;$ $\alpha=1,\ldots,4)$ aus.

A ist hierbei der Isospinindex, und $I_{AB} = \delta_{AB}$ ist die Einheit im Isospinraum;
weiterhin gilt $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Bereits in der Einleitung wurde darauf hingewiesen, daß in dem vorliegenden Modell alle beobachtbaren (Elementar-)Teilchen als Bindungszustände der "Preonenfelder" Φ_A betrachtet werden. Eine mögliche Interpretation des Isospins dieser Preonenfelder besteht nun darin, ihn mit den von HARARI <2> vorgeschlagenen "Rishonen" beziehungsweise den von SHUPE <8> vorgeschlagenen "Quips" zu identifizieren. Beide Autoren ließen die Frage nach der Dynamik offen. Später führten HARARI und SEIBERG <36> Rishonen mit Farb- und Hyperfarbladung ein, wodurch jedoch die Einfachheit des Modells verlorenging. Wir hingegen gehen im Rahmen einer einheitlichen Feldtheorie von der Lagrangedichte (2.4) aus.
Verwenden wir die Bezeichnungen von HARARI, so können wir schreiben:

$$\Phi_{A\alpha} = \begin{cases} T_\alpha & \text{für} \quad A = 1 \\ V_\alpha & \text{für} \quad A = 2 \end{cases} \tag{2.5}$$

Die beiden Rishonenfelder werden also durch Diracspinoren T_α und V_α beschrieben, und in diesem Modell trägt T die elektrische Ladung $+\frac{1}{3}e$ (e = Ladung des Positrons), und V ist neutral.
Die Lagrangedichte (2.4) lautet dann unter Weglassen der spinoriellen Indizes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = {} & i\,\bar{T}(x)\,\gamma^\mu \partial_\mu\, T(x) + i\,\bar{V}(x)\,\gamma^\mu \partial_\mu\, V(x) \\ & - f\Big\{ [\bar{T}(x)\,T(x)]\,[\bar{T}(x)\,T(x)] + 2\,[\bar{T}(x)\,T(x)]\,[\bar{V}(x)\,V(x)] \\ & + [\bar{V}(x)\,V(x)]\,[\bar{V}(x)\,V(x)] \Big\} \ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Von GROSSER und LAUXMANN <20> wurde die allgemeinste her-

mitesche, Lorentz- und PC-invariante Vierfermionen-Wechselwirkung angegeben, welche die Ladung und Rishonenzahl erhält. Die von uns in (2.4) beziehungsweise (2.6) verwendete skalare Vierfermionen-Wechselwirkung ist hierbei als Spezialfall enthalten. Da in der Lagrangedichte unseres Modells nur Ableitungen erster Ordnung vorkommen, haben die Felder die Dimension $\frac{3}{2}$, und die Kopplungskonstante f besitzt die Dimension -2.
Die Theorie ist folglich in dieser Form nicht renormierbar. Von STUMPF <21> wurde jedoch gezeigt, wie man im Falle einer skalaren Wechselwirkung zu einer renormierbaren Theorie gelangt. Diesen Formalismus werden wir nun auf die beiden Spinorfelder T und V anwenden.
Aus der Lagrangedichte (2.4) leiten wir zunächst über die Euler-Lagrange-Gleichungen die zugehörigen Feldgleichungen ab (für das Folgende siehe zum Beispiel ROMAN <37>)

$$i\,\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\partial_{\mu}\,\phi_{A\beta}(x) \;=\; 2f\,\phi_{A\alpha}(x)\,[\,\overline{\phi}_{B\beta}(x)\,\phi_{B\beta}(x)\,] \qquad (2.7)$$

und definieren

$$\pi^{\mu}_{\phi_{A\alpha}}(x) \;:=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_{A\alpha}(x))} \;=\; i\,\overline{\phi}_{A\beta}(x)\,\gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\;. \qquad (2.8a)$$

Die Zeitkomponenten dieser Vierervektoren, die sogenannten kanonisch konjugierten Impulse, spielen eine wichtige Rolle für die Quantisierung der Theorie. Wie in der Literatur üblich definieren wir deshalb

$$\pi_{\phi_{A\alpha}}(x) \;:=\; \pi^{0}_{\phi_{A\alpha}}(x) \;=\; i\,\phi^{+}_{A\alpha}(x)\;. \qquad (2.8b)$$

Der kanonische Energie-Impuls-Tensor lautet

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) \;&=\; \pi^{\mu}_{\phi}(x)\,\partial^{\nu}\phi(x) \;-\; g^{\mu\nu}\,\mathcal{L}(x) \\ &=\; i\,\overline{\phi}_{A\beta}(x)\,\gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\,\partial^{\nu}\,\phi_{A\alpha}(x) \;-\; g^{\mu\nu}\,\mathcal{L}(x)\;, \end{aligned} \qquad (2.9a)$$

T^{oo} ist die Energie- oder Hamiltondichte des Systems

$$\mathcal{H}(x) = T^{oo}(x)$$

$$= -i\,\overline{\phi}_{A\alpha}(x)\,\gamma^{k}_{\alpha\beta}\,\partial_k\,\phi_{A\beta}(x) + f\left[\overline{\phi}_{A\alpha}(x)\,\phi_{A\alpha}(x)\right]^2. \qquad (2.9b)$$

Auf Grund der Translationsinvarianz erhalten wir mit dem Noetherschen Theorem die vier Erhaltungssätze

$$\partial_\mu\, T^{\mu\nu}(x) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3)\,, \qquad (2.10)$$

die in nicht kovarianter Darstellung die Form

$$\frac{dP^\nu}{dt} = 0 \qquad (2.11)$$

annehmen mit dem Energie-Impuls-Vierervektor

$$P^\nu = \int\limits_{x_o=t} T^{o\nu}(x)\, d^3x$$

$$= \int\limits_{x_o=t} \left\{ i\,\phi^{+}_{A\alpha}(x)\,\partial^\nu\,\phi_{A\alpha}(x) - g^{o\nu}\,\mathcal{L}(x) \right\} d^3x\,. \qquad (2.12)$$

In Analogie hierzu erhalten wir auf Grund der Invarianz unter (homogenen) Lorentztransformationen die sechs Erhaltungssätze

$$\partial_\varrho\, M^{\varrho}{}_{\mu\nu}(x) = 0 \qquad (\mu<\nu,\ \mu,\nu = 0, 1, 2, 3) \qquad (2.13)$$

für die kovariante Tensordichte $M^{\rho}{}_{\mu\nu}$ ($M^{\rho}{}_{\mu\nu} = -M^{\rho}{}_{\nu\mu}$) mit

$$M^{\varrho}{}_{\mu\nu}(x) = \pi^{\varrho}_{\phi}(x)\,\Sigma_{\mu\nu}\,\phi(x) + \pi^{\varrho}_{\phi}(x)\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right)\phi(x)$$

$$+ \left(\delta^{\varrho}_{\mu}\,x_\nu - \delta^{\varrho}_{\nu}\,x_\mu\right)\mathcal{L}(x)\,. \qquad (2.14)$$

$(\mu, \nu, \varrho = 0, 1, 2, 3)$

Hierbei ist $\Sigma_{\mu\nu,\alpha\beta} := -\frac{1}{4}\,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]_{\alpha\beta}$.

Aus (2.13) folgen die Erhaltungssätze

$$\frac{d\,M_{\mu\nu}}{dt} = 0 \tag{2.15}$$

für den Drehimpulstensor

$$M_{\mu\nu} := \int_{x_0=t} M^0_{\mu\nu}\,(x)\,d^3x\,. \tag{2.16}$$

Die Größen

$$J_i := M_{jk} \qquad (i,j,k = 1,2,3 \text{ zyklisch}) \tag{2.17}$$

sind die Komponenten des Gesamtdrehimpulses.

Definieren wir nun die Paritätstransformation

$$\phi'_{A\alpha}\,(x') := i\,\gamma^0_{\alpha\beta}\,\phi_{A\beta}\,(x) \tag{2.18}$$

mit $\quad x' := (t\,,\,-\vec{x})\,,$

so rechnet man leicht nach, daß die Lagrangefunktion

$$L[\phi] := \int \mathcal{L}(x)\,d^3x \tag{2.19}$$

und die Hamiltonfunktion

$$H[\phi] := \int \mathcal{H}(x)\,d^3x \tag{2.20}$$

invariant unter dieser Transformation sind.
Es gilt also

$$L[\phi] = L[\phi']$$

und

$$H[\phi] = H[\phi'] \,. \tag{2.21}$$

Mit

$$\tilde{\phi}_{A\alpha}(x) := \phi'_{A\alpha}(x') = i\gamma^{0}_{\alpha\beta}\,\phi_{A\beta}(x) \tag{2.22}$$

können wir die Hamiltonfunktion $H[\Phi]$ (2.15) als Funktional der Felder Φ und $\tilde{\Phi}$ schreiben. Hierzu definieren wir

$$\begin{aligned} H[\phi,\tilde{\phi}] := &-\frac{i}{2}\int \overline{\phi}_{A\alpha}(x)\,\gamma^{k}_{\alpha\beta}\,\partial_k\,\phi_{A\beta}(x)\,d^3x \\ &+\frac{i}{2}\int \overline{\tilde{\phi}}_{A\alpha}(x)\,\gamma^{k}_{\alpha\beta}\,\partial_k\,\tilde{\phi}_{A\beta}(x)\,d^3x \\ &+\frac{1}{4}f\int\{[\overline{\phi}_{A\alpha}(x)+\overline{\tilde{\phi}}_{A\alpha}(x)]\cdot[\phi_{A\alpha}(x)+\tilde{\phi}_{A\alpha}(x)]\}^2 d^3x \,, \end{aligned} \tag{2.23}$$

und es gilt <21>

$$H[\Phi] = H[\Phi,\tilde{\Phi}].$$

Die zur Hamiltonfunktion $H[\Phi,\tilde{\Phi}]$ gehörende Lagrangefunktion lautet

$$\begin{aligned} L[\phi,\tilde{\phi}] = &\frac{i}{2}\int\{\overline{\phi}_{A\alpha}(x)\,\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\partial_\mu\,\phi_{A\beta}(x) - \overline{\tilde{\phi}}_{A\alpha}(x)\,\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\partial_\mu\,\phi_{A\beta}(x)\}\,d^3x \\ &-\frac{1}{4}f\int\{[\overline{\phi}_{A\alpha}(x)+\overline{\tilde{\phi}}_{A\alpha}(x)]\cdot[\phi_{A\alpha}(x)+\tilde{\phi}_{A\alpha}(x)]\}^2 d^3x \,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Während die Hamiltonfunktionen $H[\Phi]$ und $H[\Phi,\tilde{\Phi}]$ äquivalent sind, gilt dies nicht für die zugehörigen Lagrangefunktionen:

$$L[\Phi] \neq L[\Phi,\tilde{\Phi}]$$

Wir haben folglich zwei verschiedene Lagrangefunktionen erhalten, obwohl die Relation (2.22) noch gültig ist und Φ und $\tilde{\Phi}$ keine unabhängigen Felder sind.

Definieren wir

$$\varphi_{A1\alpha}(x) := \phi_{A\alpha}(x) ,$$

$$\varphi_{A2\alpha}(x) := \tilde{\phi}_{A\alpha}(x) \qquad (2.25)$$

und

$$\lambda_1 := 2 \quad , \quad \lambda_2 := -2 ,$$

so können wir die Lagrangefunktion (2.24) für die weiteren Rechnungen in der Form

$$L[\varphi_1, \varphi_2] = i \sum_{j=1}^{2} \int \frac{1}{\lambda_j} \, \overline{\varphi}_{Aj\alpha}(x) \, \gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \, \partial_{\mu} \, \varphi_{Aj\beta}(x) \, d^3x$$

$$- \frac{1}{4} f \int \left\{ \left[\sum_{j=1}^{2} \overline{\varphi}_{Aj\alpha}(x) \right] \left[\sum_{k=1}^{2} \varphi_{Ak\alpha}(x) \right] \right\}^2 d^3x \qquad (2.26)$$

schreiben.

2.3 Quantisierung

Kehren wir wieder zurück zur Lagrangedichte (2.4), so ergibt kanonische Quantisierung mit (2.8b) die folgenden gleichzeitigen Antivertauschungsrelationen:

$$\left\{ \phi^{+}_{A\alpha}(t,\vec{x}) , \, \phi_{A'\alpha'}(t,\vec{x}') \right\} = \delta_{AA'} \, \delta_{\alpha\alpha'} \, \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

und (2.27)

$$\left\{ \phi^{+}_{..}(t,\vec{x}) , \, \phi^{+}_{..}(t,\vec{x}') \right\} = \left\{ \phi_{..}(t,\vec{x}) , \, \phi_{..}(t,\vec{x}') \right\} = 0$$

Diese AVR sind verträglich mit den Heisenberg-Gleichungen

$$\left[P_\nu\,,\,\phi_{A\alpha}(x)\right] = -i\,\partial_\nu\,\phi_{A\alpha}(x)\,, \tag{2.28a}$$

das heißt, die Operatoren P_ν sind die Generatoren der Translationen.
Entsprechend erfüllen die Operatoren $M_{\mu\nu}$ die Gleichung

$$\left[M_{\mu\nu}\,,\,\phi_{A\alpha}(x)\right] = i\,(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\,\phi_{A\alpha}(x) - i\,\Sigma_{\mu\nu,\alpha\beta}\,\phi_{A\beta}(x)\,, \tag{2.28b}$$

sie sind die Generatoren der Lorentztransformationen.
Aus (2.27) erhalten wir die gleichzeitigen AVR für die in (2.22) definierten Felder $\tilde{\phi}(x)$:

$$\left\{\tilde{\phi}^+_{A\alpha}(t,\vec{x})\,,\,\tilde{\phi}_{A'\alpha'}(t,\vec{x}')\right\} = \delta_{AA'}\,\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

und (2.29)

$$\left\{\tilde{\phi}^+_{..}(t,\vec{x})\,,\,\tilde{\phi}^+_{..}(t,\vec{x}')\right\} = \left\{\tilde{\phi}_{..}(t,\vec{x})\,,\,\tilde{\phi}_{..}(t,\vec{x}')\right\} = 0$$

Verwenden wir andererseits die nicht äquivalente Lagrangefunktion $L[\varphi_1,\varphi_2]$ (2.26) als Grundlage der Quantisierung und fassen dabei φ_1 und φ_2 als unabhängige Felder auf, so erhalten wir

$$\pi_{\varphi_{Aj\alpha}}(x) = i\,\frac{1}{\lambda_j}\,\varphi^+_{Aj\alpha}(x) \tag{2.30}$$

(keine Summation über j)

und

$$\left\{\varphi^+_{Aj\alpha}(t,\vec{x})\,,\,\varphi_{A'j'\alpha'}(t,\vec{x}')\right\} = \lambda_j\,\delta_{AA'}\,\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\left\{\varphi^+_{...}(t,\vec{x})\,,\,\varphi^+_{...}(t,\vec{x}')\right\} = \left\{\varphi_{...}(t,\vec{x})\,,\,\varphi_{...}(t,\vec{x}')\right\} = 0\,. \tag{2.31}$$

Diese Antikommutatoren sind offensichtlich nicht mit

(2.27) und (2.29) verträglich. Ausgehend von den beiden Hamiltonfunktionen (2.20) und (2.23), die im Rahmen der klassischen Mechanik äquivalent sind, haben wir mittels der beiden nicht äquivalenten Lagrangefunktionen (2.19) und (2.24) verschiedene AVR erhalten. Da wir bei der Quantisierung der Felder φ_{Aj} die Bedingung (2.22) aufgeben mußten, und φ_{A1} und φ_{A2} beziehungsweise Φ_A und $\tilde{\Phi}_A$ unabhängige Operatoren sind, sind in der quantisierten Theorie die beiden Hamiltonoperatoren nicht äquivalent.

Wir möchten bereits an dieser Stelle auf eine Besonderheit der AVR (2.31) hinweisen: Wegen $\lambda_2 = -2$ treten bei der Quantisierung von (2.26) "negative Antikommutatoren" auf, und damit enthält der zugehörige "Hilbertraum" Zustände mit "indefiniter Norm" (siehe NAGY <18>). Dies bedeutet, daß die in der Quantenmechanik übliche Wahrscheinlichkeitsinterpretation zunächst in Frage gestellt ist. Im folgenden werden wir hierauf wieder zurückkommen.

Die Lagrangefunktion $L[\Phi]$ (2.19) und die Hamiltonfunktion $H[\Phi]$ (2.20) sind invariant unter den globalen Phasentransformationen

$$1)\quad \Phi_{A\alpha}(x) \longrightarrow \exp\left(-i\chi\,\varepsilon_1(A)\right)\Phi_{A\alpha}(x)$$

$$\text{mit}\qquad \varepsilon_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{für } A=1 \\ 0 & \text{für } A=2 \end{cases}, \qquad (2.32)$$

$$2)\quad \Phi_{A\alpha}(x) \longrightarrow \exp\left(-i\chi\,\varepsilon_2(A)\right)\Phi_{A\alpha}(x)$$

$$\text{mit}\qquad \varepsilon_2(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A=1 \\ 1 & \text{für } A=2 \end{cases} \qquad (2.33)$$

und damit auch unter

3) $\phi_{A\alpha}(x) \longrightarrow \exp\left(-i\,\chi\,\varepsilon_3(A)\right)\phi_{A\alpha}(x)$

mit $\varepsilon_3(A) = 1$ für $A = 1, 2$. (2.34)

X ist hierbei ein freier Parameter, und es ist zu beachten, daß in (2.32) - (2.34) nicht über A summiert wird.
Invarianz unter diesen Phasentransformationen bedeutet, daß die entsprechenden Teilchenzahloperatoren

$$N_i[\phi] = \int \varepsilon_i(A)\,\phi^{+}_{A\alpha}(x)\,\phi_{A\alpha}(x)\,d^3x \qquad (i=1,2,3) \tag{2.35}$$

mit dem Hamiltonoperator $H[\Phi]$ kommutieren:

$$[H[\Phi], N_i[\Phi]] = 0 \tag{2.36}$$

Die Teilchenzahlen

$$N_1[\Phi] = N_T\ ,$$
$$N_2[\Phi] = N_V$$
und $$N_3[\Phi] = N_T + N_V$$

bleiben also erhalten; es handelt sich hierbei um "gute Quantenzahlen".

Betrachten wir nun die Lagrangefunktion $L[\varphi_1, \varphi_2]$ (2.26), so stellen wir fest, daß diese ebenfalls invariant ist unter den globalen Phasentransformationen

$$\varphi_{Aj\alpha}(x) \longrightarrow \exp\left(-i\,\chi\,\varepsilon_k(A)\right)\varphi_{Aj\alpha}(x) \qquad (k=1,2,3) \tag{2.37}$$

mit ε_k wie in (2.32) - (2.34).

Die Teilchenzahloperatoren

$$N_k[\varphi_1,\varphi_2] = \int \varepsilon_k(A)\ \frac{1}{\lambda_j}\ \varphi^+_{Aj\alpha}(x)\ \varphi_{Aj\alpha}(x)\ d^3x \qquad (2.38)$$

$$= \int \varepsilon_k(A)\ \frac{1}{2}\left\{\varphi^+_{A1\alpha}(x)\ \varphi_{A1\alpha}(x) - \varphi^+_{A2\alpha}(x)\ \varphi_{A2\alpha}(x)\right\} d^3x$$

vertauschen also ebenfalls mit dem Hamiltonoperator $H[\varphi_1,\varphi_2]$:

$$[H[\varphi_1,\varphi_2], N_k[\varphi_1,\varphi_2]] = 0 \qquad (2.39)$$

$H[\varphi_1,\varphi_2]$ ist hierbei der Hamiltonoperator (2.23) unter Berücksichtigung der Definition (2.25).

Die Lagrangefunktion $L[\varphi_1, \varphi_2]$ ist jedoch nicht invariant unter den Transformationen

$$\varphi_{Aj\alpha}(x) \longrightarrow \exp\left(i\chi\,\varepsilon_k(j)\right)\varphi_{Aj\alpha}(x) \quad (k=1,2)$$

mit $$\varepsilon_1(j) = \begin{cases} 1 & \text{für } j=1 \\ 0 & \text{für } j=2 \end{cases}$$

und $$\varepsilon_2(j) = \begin{cases} 0 & \text{für } j=1 \\ 1 & \text{für } j=2 \end{cases} . \qquad (2.40)$$

Wir haben also keine (getrennte) Teilchenzahlerhaltung bezüglich der Teilchenzahloperatoren

$$N[\varphi_1] = \int \frac{1}{2}\ \varphi^+_{A1\alpha}(x)\ \varphi_{A1\alpha}(x)\ d^3x \qquad (2.41)$$

und

$$N[\varphi_2] = -\int \frac{1}{2}\ \varphi^+_{A2\alpha}(x)\ \varphi_{A2\alpha}(x)\ d^3x \ . \qquad (2.42)$$

Aus diesem Grund gehen wir zu der "großkanonischen" Hamiltonfunktion

$$\mathbb{H}[\varphi_1,\varphi_2] = H[\varphi_1,\varphi_2] + \frac{1}{\lambda_j}\, m_{Aj} \int \overline{\varphi}_{Aj\alpha}(x)\ \varphi_{Aj\alpha}(x)\, d^3x \qquad (2.43)$$

und der zugehörigen "großkanonischen" Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}\mathbb{L}[\varphi_1,\varphi_2] &= L[\varphi_1,\varphi_2] - \frac{1}{\lambda_j}\, m_{Aj} \int \overline{\varphi}_{Aj\alpha}(x)\ \varphi_{Aj\alpha}(x)\ d^3x \\ &= \int \frac{1}{\lambda_j}\ \overline{\varphi}_{Aj\alpha}(x) \left(i\gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\,\partial_{\mu} - m_{Aj}\,\delta_{\alpha\rho} \right) \varphi_{Aj\beta}(x)\, d^3x \\ &\quad - \frac{1}{4} f \int \Big\{ \Big[\sum_j \overline{\varphi}_{Aj\alpha}(x) \Big] \Big[\sum_k \varphi_{Ak\alpha}(x) \Big] \Big\}^2 d^3x \end{aligned} \qquad (2.44)$$

und den entsprechenden Operatoren über.

Hierbei ist auch über die Indizes A und α,β zu summieren. Um die Isospininvarianz nicht zu zerstören, fordern wir, daß die Massenparameter m_{Aj} (A=1,2 und j=1,2) unabhängig vom Isospinindex A sind:

$$m_{1j} = m_{2j} \qquad (j=1,2) \qquad (2.45)$$

Weiterhin verlangen wir

$$m_{A1} \neq m_{A2} \qquad (A=1,2). \qquad (2.46)$$

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist diese Bedingung notwendig, um aus der Lagrangefunktion (2.44) eine renormierbare Feldgleichung abzuleiten.

2.4 Renormierbarkeit

PAIS und UHLENBECK <16> zeigten, daß zu einer Lagrangedichte für lineare Gleichungen mit Ableitungen höherer Ordnung eine "dynamisch äquivalente" Lagrangedichte mit Ableitungen erster Ordnung existiert. Das hierbei verwendete Verfahren beruht auf der Partialbruchzerlegung des inversen Operators höherer

$$N_k[\varphi_1,\varphi_2] = \int \varepsilon_k(A)\ \frac{1}{\lambda_j}\ \varphi^+_{Aj\alpha}(x)\ \varphi_{Aj\alpha}(x)\ d^3x \qquad (2.38)$$

$$= \int \varepsilon_k(A)\ \frac{1}{2}\left\{\varphi^+_{A1\alpha}(x)\ \varphi_{A1\alpha}(x) - \varphi^+_{A2\alpha}(x)\ \varphi_{A2\alpha}(x)\right\} d^3x$$

vertauschen also ebenfalls mit dem Hamiltonoperator $H[\varphi_1,\varphi_2]$:

$$[H[\varphi_1,\varphi_2], N_k[\varphi_1,\varphi_2]] = 0 \qquad (2.39)$$

$H[\varphi_1,\varphi_2]$ ist hierbei der Hamiltonoperator (2.23) unter Berücksichtigung der Definition (2.25).

Die Lagrangefunktion $L[\varphi_1, \varphi_2]$ ist jedoch nicht invariant unter den Transformationen

$$\varphi_{Aj\alpha}(x) \longrightarrow \exp\left(i\chi\,\varepsilon_k(j)\right)\varphi_{Aj\alpha}(x) \quad (k=1,2)$$

mit $$\varepsilon_1(j) = \begin{cases} 1 & \text{für } j=1 \\ 0 & \text{für } j=2 \end{cases}$$

und $$\varepsilon_2(j) = \begin{cases} 0 & \text{für } j=1 \\ 1 & \text{für } j=2 \end{cases} . \qquad (2.40)$$

Wir haben also keine (getrennte) Teilchenzahlerhaltung bezüglich der Teilchenzahloperatoren

$$N[\varphi_1] = \int \frac{1}{2}\ \varphi^+_{A1\alpha}(x)\ \varphi_{A1\alpha}(x)\ d^3x \qquad (2.41)$$

und

$$N[\varphi_2] = -\int \frac{1}{2}\ \varphi^+_{A2\alpha}(x)\ \varphi_{A2\alpha}(x)\ d^3x \ . \qquad (2.42)$$

Aus diesem Grund gehen wir zu der "großkanonischen" Hamiltonfunktion

$$L[S] = \int 2\,\Delta m_{A_j}\,\bar{S}_{A_j}(x)\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_{A_j})\,S_{A_j}(x)\,d^3x \qquad (2.49)$$
$$- 4\,(\Delta m_{A1})^2\,f \int \{[\sum_j \bar{S}_{A_j}(x)][\sum_k S_{Ak}(x)]\}^2\,d^3x\,.$$

Die Feldoperatoren S haben die Dimension 1 und erfüllen nach (2.31) die gleichzeitigen AVR

$$\{S^+_{Aj\alpha}(t,\vec{x}),\ S_{A'j'\alpha'}(t,\vec{x}')\} = \frac{1}{2\Delta m_{A_j}}\,\delta_{AA'}\,\delta_{jj'}\,\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$
$$\{S^+_{\dots}(t,\vec{x}),\ S^+_{\dots}(t,\vec{x}')\} = \{S_{\dots}(t,\vec{x}),\ S_{\dots}(t,\vec{x}')\} = 0\,. \qquad (2.50)$$

Auch hier treten also "negative Antikommutatoren" mit den bereits oben beschriebenen Konsequenzen auf.

Berücksichtigen wir, daß Δm_{A1} unabhängig vom Isospinindex A ist, so können wir

$$g := 4(\Delta m_{11})^2 f \qquad (2.51)$$

als neue Kopplungskonstante definieren.
Da f die Dimension -2 hat, ist g dimensionslos.
Die Feldgleichungen lauten

$$(i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu - m_{A_j}\delta_{\alpha\beta})\,S_{A_j\beta}(x)$$
$$= \frac{1}{\Delta m_{A_j}}\,g\,[\sum_k S_{Ak\alpha}(x)][\sum_\ell \bar{S}_{B\ell\beta}(x)][\sum_m S_{Bm\beta}(x)] \qquad (2.52)$$

(keine Summation über A,j,α).

Diese Feldgleichungen sind - abgesehen von der expliziten Gestalt des Wechselwirkungs-Terms - identisch mit Gleichung (2.52) in <1>. Dort wurde diese Gleichung aus einer Lagrangedichte mit Ableitungen zweiter Ordnung für die Felder

$$R_{A\alpha}(x) := S_{A1\alpha}(x) + S_{A2\alpha}(x) \qquad (2.53)$$

abgeleitet.

Wir werden nun zeigen, daß auch ausgehend von (2.52) die Gleichung zweiter Ordnung für die Felder R_A hergeleitet werden kann <22,23>.
In einer etwas vereinfachten Notation gilt:

$$
\begin{aligned}
&(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{A1})(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{A2})\,R_A \\
&\quad = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{A1})(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{A2})\,[S_{A1} + S_{A2}] \\
&\quad = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{A2})\,\frac{1}{\Delta m_{A1}}\; g\, R_A\,(\bar{R}_B R_B) \\
&\qquad\quad + (i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{A1})\,\frac{1}{\Delta m_{A2}}\; g\, R_A\,(\bar{R}_B R_B) \\
&\quad = \frac{1}{\Delta m_{A1}}\;(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{A2} - i\gamma^\mu\partial_\mu + m_{A1})\; g\, R_A\,(\bar{R}_B R_B) \\
&\quad = 2\, g\, R_A\,(\bar{R}_B R_B)
\end{aligned}
$$

Die Felder R_A erfüllen also die folgende renormierbare Gleichung zweiter Ordnung mit dimensionsloser Kopplungskonstante

$$
(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{A1})(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{A2})\,R_A = 2\, g\, R_A\,(\bar{R}_B R_B)
\qquad (2.54)
$$

(keine Summation über A=1,2),

und aus den AVR (2.50) für die Feldoperatoren S erhalten wir

$$
\left\{ R^{+}_{A\alpha}(t,\vec{x}),\; R_{A'\alpha'}(t,\vec{x}') \right\} = 0 . \qquad (2.55)
$$

Die zu (2.51) inverse Abbildung lautet

$$
S_{Aj\alpha}(x) = \frac{1}{2\,\Delta m_{Aj}}\;(i\gamma^\mu_{\alpha\rho}\partial_\mu - m_{Aj}\,\delta_{\alpha\rho})\,R_{A\rho}(x) \qquad (2.56)
$$

(keine Summation über A und j).

Für die Eineindeutigkeit dieser Abbildung verweisen wir auf <22,23>.
Aus (2.49) erhalten wir die zu (2.52) adjungierten Feldgleichungen

$$\left(-i^{t}\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\partial_{\mu} - m_{Aj}\,\delta_{\alpha\beta}\right)\,\overline{S}_{Aj\beta}(x)$$

$$= \frac{1}{\Delta m_{Aj}}\, g\left[\sum_{k}\overline{S}_{Ak\alpha}(x)\right]\left[\sum_{\ell}\overline{S}_{B\ell\beta}(x)\right]\left[\sum_{m}S_{Bm\beta}(x)\right] \qquad (2.57)$$

(keine Summation über A,j,α).

Wir wollen nun die Feldgleichungen für die Operatoren S und S^{+} zu einer einheitlichen Gleichung zusammenfassen und treffen deshalb einige Definitionen, die uns viel Schreibarbeit ersparen werden. Vor allem für die folgende Diskussion des Zustandsraums und den Übergang zum Funktionalformalismus ist eine kompakte Notation vorteilhaft.
Zuerst führen wir einen zusätzlichen Index ein, den sogenannten "Superspinor-Index" Λ . Wir definieren hierzu Operatoren

$$\Psi_{Ai\Lambda\alpha}(x) := \begin{cases} S_{Ai\alpha}(x) & \text{für } \Lambda=1 \\ S^{+}_{Ai\alpha}(x) & \text{für } \Lambda=2 \end{cases}, \qquad (2.58)$$

die nach (2.50) den gleichzeitigen AVR

$$\left\{\Psi_{Ai\Lambda\alpha}(t,\vec{x})\,,\,\Psi_{A'i'\Lambda'\alpha'}(t,\vec{x}')\right\} = A_{Ai\Lambda\alpha,A'i'\Lambda'\alpha'}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (2.59)$$

mit

$$A_{Ai\Lambda\alpha,A'i'\Lambda'\alpha'} := \frac{1}{2\Delta m_{Ai}}\,\delta_{AA'}\,\delta_{ii'}\,\sigma^{1}_{\Lambda\Lambda'}\,\delta_{\alpha\alpha'}$$

genügen. σ^{1} ist die erste Paulimatrix.
Die zu diesem Formalismus gehörenden "Diracmatrizen" lauten

$$\Gamma^{\mu}_{\Lambda\alpha_1\Lambda'\alpha'} := \delta_{\Lambda\Lambda'} \cdot \begin{cases} \gamma^{\mu}_{\alpha\alpha'} & \text{für } \Lambda = 1 \\ -(\gamma^0 {}^t\gamma^{\mu} \gamma^0)_{\alpha\alpha'} & \text{für } \Lambda = 2 \end{cases} , \tag{2.60}$$

und unter Einbeziehung aller Indizes definieren wir

$$D^{\mu}_{Ai\Lambda\alpha_1 A'i'\Lambda'\alpha'} := i\, \delta_{AA'}\, \delta_{ii'}\, \Gamma^{\mu}_{\Lambda\alpha_1\Lambda'\alpha'} . \tag{2.61}$$

Wir fassen alle diskreten Indizes zu einem Gesamtindex Z zusammen, also

$$Z \equiv A, i, \Lambda, \alpha \tag{2.62}$$

und können damit die Feldgleichungen (2.52) und die aus (2.57) abgeleiteten Gleichungen für die Felder S^+ in einer geschlossenen Form angeben:

$$\sum_{Z_2} \left(D^{\mu}_{Z_1 Z_2} \partial_{\mu} - M_{Z_1 Z_2} \right) \Psi_{Z_2}(x)$$
$$= \sum_{Z_2 Z_3 Z_4} U_{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4}\, \Psi_{Z_2}(x)\, \Psi_{Z_3}(x)\, \Psi_{Z_4}(x) \tag{2.63}$$

Summation über den Gesamtindex Z bedeutet natürlich Summation über alle Indizes A,i,Λ,α gemäß dem jeweiligen Wertebereich, und es ist

$$M_{Z_1 Z_2} = M_{A_1 i_1 \Lambda_1 \alpha_1 , A_2 i_2 \Lambda_2 \alpha_2} := m_{A_1 i_1}\, \delta_{A_1 A_2}\, \delta_{i_1 i_2}\, \delta_{\Lambda_1 \Lambda_2}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \tag{2.64}$$

und

$$U_{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4} := \frac{1}{\Delta m_{A_1 i_1}}\, g\, \delta_{A_1 A_2}\, \delta_{A_3 A_4}\, \delta_{\Lambda_1 \Lambda_2}\, \delta_{2\Lambda_3}\, \delta_{1\Lambda_4}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2}\, \gamma^0_{\alpha_3 \alpha_4} . \tag{2.65}$$

In den Definitionen (2.64) und (2.65) darf über doppelte Indizes nicht summiert werden; Summationen sind erst nach der Anwendung von M und U auf Feldoperatoren durchzuführen.

An manchen Stellen fassen wir schließlich nicht nur die diskreten Indizes, sondern zusätzlich die Variablen zu einem Gesamtindex I zusammen:

$$I \equiv Z,x \equiv A,i,\Lambda,\alpha,x \tag{2.66}$$

Anstelle von $\Psi_Z(x)$ schreiben wir einfach Ψ_I, und es ist dann natürlich über die entsprechenden Variablen (hier:x) zu integrieren, falls ein solcher "Superindex" mehrfach vorkommt.

2.5 Darstellung der Poincarêgruppe im Zustandsraum

Die letzten zwei Abschnitte dieses Kapitels enthalten eine Zusammenstellung von wichtigen Eigenschaften des Zustandsraums. In der nichtlinearen Spinortheorie bestimmt erst die der Theorie zugrunde liegende Feldgleichung den Zustandsraum und dessen Strukturen, die wir auch im Funktionalraum (siehe Kapitel 3) wieder finden müsssen. Die folgenden Ausführungen sollen den Übergang zum Funktionalformalismus vorbereiten und sind deshalb größtenteils abstrakt gehalten, da die konkreten Rechnungen mit Hilfe des Funktionalkalküls durchgeführt werden.
Wir fordern, daß in Analogie zur Quantenmechanik der Zustandsraum eine Darstellung der Symmetriegruppen trägt. Als wichtigstes Beispiel einer Symmetriegruppe in der nichtlinearen Spinortheorie betrachten wir die Darstellung der Poincarêgruppe im Zustandsraum <38,39>.

Im folgenden bezeichnen wir mit V den Zustandsraum der Theorie. Dann gibt es zu jeder inhomogenen Lorentztransformation

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + b^{\mu} \tag{2.67}$$

einen Operator $U = U(\Lambda,b)$, der einen Zustand $|a\rangle \in V$ gemäß

$$|a\rangle' = U\,|a\rangle \tag{2.68}$$

transformiert. Weiterhin fordern wir die Existenz eines invarianten Grundzustandes $|0\rangle \in V$ mit

$$|0\rangle = U\,|0\rangle. \tag{2.69}$$

Die Feldoperatoren $\Psi_Z(x)$ ($Z \equiv A,i,\Gamma,\alpha$) transformieren sich als Spinoroperatoren in der Form <40>

$$U^{-1}\,\Psi_Z(x)\,U = L_{ZZ'}(\Lambda)\;\Psi_{Z'}\left(\Lambda^{-1}(x-b)\right) \tag{2.70}$$

mit

$$L_{ZZ'}(\Lambda) = \delta_{AA'}\,\delta_{ii'}\,\delta_{\Gamma\Gamma'}\begin{cases} L_{\alpha\alpha'}(\Lambda) & \text{für } \Gamma=1 \\ L^{*}_{\alpha\alpha'}(\Lambda) & \text{für } \Gamma=2 \end{cases}.$$

$L_{\alpha\alpha'}(\Lambda)$ ist die Transformationsmatrix für gewöhnliche Diracspinoren, $L^{*}_{\alpha\alpha'}(\Lambda)$ die hierzu komplex konjugierte Matrix.
In Standardform geschrieben lautet das Transformationsverhalten der Operatoren $\Psi_Z(x)$

$$U\,\Psi_Z(x)\,U^{-1} = L_{ZZ'}(\Lambda^{-1})\;\Psi_{Z'}(\Lambda x + b). \tag{2.71}$$

Für den Fall der Lagrangedichte erster Ordnung (2.4) haben wir bereits in Abschnitt 2.2 und 2.3 eine Darstellung der Genera-

toren der Poincarégruppe kennengelernt. Wir erhalten nun leicht die entsprechende Darstellung im Zustandsraum unseres Modells, wenn wir in den Formeln für P_μ und $M_{\mu\nu}$ die Operatoren Φ und π_Φ durch S beziehungsweise π_S und die Lagrangedichte (2.4) durch die zur Lagrangefunktion L[S] (2.49) gehörende Dichte ersetzen. Für diese Darstellung der Generatoren der Poincarégruppe schreiben wir $\hat{P}_\mu$ und $\hat{M}_{\mu\nu}$.
Dann hat zum Beispiel der Hamiltonoperator (Generator der Zeittranslation) die Gestalt

$$\hat{P}_o = H[S] = -\int 2\,\Delta m_{A_j}\,\overline{S}_{A_j}(x)\left(i\gamma^\kappa\partial_\kappa - m_{A_j}\right) S_{A_j}(x)\,d^3x$$

$$+\,g\int\left\{\left[\sum_i \overline{S}_{A_j}(x)\right]\left[\sum_k S_{A_k}(x)\right]\right\}^2 d^3x\ , \qquad (2.72)$$

und es gelten die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
&[\hat{P}_\mu,\hat{P}_\nu] = 0\ ,\\
&[\hat{P}_\lambda,\hat{M}_{\mu\nu}] = i(g_{\lambda\nu}\hat{P}_\mu - g_{\lambda\mu}\hat{P}_\nu)\ ,\\
&[\hat{M}_{\mu\nu},\hat{M}_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}\hat{M}_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\hat{M}_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}\hat{M}_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}\hat{M}_{\mu\sigma}), \qquad (2.73)\\
&[\hat{P}_\mu,\Psi_Z(x)] = -i\partial_\mu\Psi_Z(x) =: P_\mu(x)\Psi_Z(x)
\end{aligned}$$

und

$$[\hat{M}_{\mu\nu},\Psi_Z(x)] = M_{\mu\nu,ZZ'}(x)\Psi_{Z'}(x)\ .$$

Wir erhalten $M_{\mu\nu,ZZ'}(x)$, indem wir Gleichung (2.28b) in den Superspinorformalismus für die Operatoren S und S^+ übertragen.
Die Generatoren $\hat{P}$ und $\hat{M}$ sind dabei so gewählt, daß die Lorentztransformation

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu + \omega^\mu{}_\nu\, x^\nu \qquad (2.74a)$$

mit infinitesimalen reellen Parametern ε und ω ($\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$) im Zustandsraum die Darstellung

$$U = 1 + \delta U(\varepsilon,\omega) = 1 + i\,\hat{P}_\mu\,\varepsilon^\mu + \frac{1}{2}\,i\,\hat{M}_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu} \qquad (2.74b)$$

hat. In der Literatur ist auch die Verwendung von $\hat{M}' = -\hat{M}$ üblich.
Die beiden Casimiroperatoren der Poincarégruppe sind

$$\hat{P}^2 = \hat{P}_\mu\,\hat{P}^\mu \quad \text{und} \quad \hat{W} = \hat{\Gamma}_\mu\,\hat{\Gamma}^\mu. \qquad (2.75)$$

Hierbei ist $\hat{\Gamma}_\mu$ der Pauli-Lubanski-Spinvektor

$$\hat{\Gamma}_\mu := \frac{1}{2m}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\varrho}\,\hat{M}^{\nu\varrho}\,\hat{P}^\sigma\,, \qquad (2.76)$$

und wir können die Menge $\{\hat{P}^2,\hat{P}_\mu,\hat{W},\hat{\Gamma}_3\}$ als maximalen Satz kommutierender Operatoren wählen. Ist $|a\rangle \in V$ ein gemeinsamer Eigenzustand, so erfüllt $|a\rangle$ die Eigenwertgleichungen

$$\hat{P}^2|a\rangle = m^2|a\rangle\,,$$
$$\hat{P}_\mu|a\rangle = p_\mu|a\rangle\,,$$
$$\hat{W}\,|a\rangle = s(s+1)|a\rangle$$

und

$$\hat{\Gamma}_3|a\rangle = s_3|a\rangle\,. \qquad (2.77)$$

2.6 Norm von Eigenzuständen

Während in der gewöhnlichen Quantenmechanik der Zustandsraum stets ein Hilbertraum ist, führt das in dieser Arbeit behandelte Spinorfeldmodell aufgrund der nichtkanonischen Antivertauschungsrelationen (2.50) zu einem Zustandsraum mit indefinitem inneren Produkt. Ein solches inneres Produkt induziert keine Metrik im strengen Sinn, und der Zustandsraum erfüllt nicht die Hilbertraum-Axiome, dennoch ist in der Physik die Bezeichnung "(Hilbert-)Raum mit indefiniter Metrik" üblich <11,18,41>. Diese Sprechweise ermöglicht eine kompakte Formulierung, und "Hilbertraum" wird hierbei als Synonym für Zustandsraum gebraucht. Vom mathematischen Standpunkt trifft die Bezeichnung "(Zustands-)Raum mit indefinitem inneren Produkt" besser zu <42>. Ebenfalls in Abweichung von der mathematischen Definition bezeichnen wir das innere Produkt eines Zustands $|a\rangle \in V$ mit sich selbst, das heißt die reelle Zahl $\langle a|a\rangle$, als Norm von $|a\rangle$, obwohl diese Zahl auch Werte ≤ 0 annehmen kann.
Ein linearer Raum mit einer nicht positiv definiten hermiteschen Form $\langle .|. \rangle$ zeigt ungewohnte Eigenschaften <11,41>:

- Zwar ist der Erwartungswert eines selbstadjungierten Operators H, der im Falle indefiniter Metrik auch pseudohermitescher Operator genannt wird, reell, doch gilt dies nicht notwendig für seine Eigenwerte.
- Ist $|a\rangle$ ein Eigenzustand des selbstadjungierten Operators H zum Eigenwert h, so gilt:

  $$\langle a|a\rangle \neq 0 \Longrightarrow h \in \mathbb{R}$$

  und äquivalent hierzu

  $$h \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \Longrightarrow \langle a|a\rangle = 0$$

- Zwei Eigenzustände von H zu verschiedenen reellen Eigenwerten sind zwar orthogonal, dagegen brauchen zwei Eigenzustände zu komplexen Eigenwerten nicht orthogonal zu sein, wenn die beiden Eigenwerte komplex konjugiert sind.

Wir wollen uns nun näher mit der Energieeigenwertgleichung

$$H|a\rangle = E_a|a\rangle \tag{2.78}$$

und insbesondere der Norm eines Eigenzustands $|a\rangle$ beschäftigen.
$H = H[\Psi]$ ist der (pseudo-)hermitesche Hamiltonoperator (2.72) des Modells im Superspinorformalismus. Für eine konkrete Berechnung der Energie ist hiervon durch eine geeignete Normalordnungsvorschrift oder ein Differenzverfahren die unendliche Nullpunktsenergie abzuziehen. Im folgenden geben wir für das innere Produkt $\langle a|b\rangle$ zweier Eigenzustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ beziehungsweise für die Norm eines solchen Zustandes eine Darstellung mittels Links- und Rechtslösungen einer Eigenwertgleichung, die H in gemischt ko-kontravarianter Form enthält <29,30>. Ist $|a\rangle$ eine Lösung von (2.78) und damit Eigenzustand des (einzeitigen) Hamiltonoperators, so ist $\langle a| = |a\rangle^+$ in der Basis

$$\left\{ \langle 0|\, \Psi_{z_1}(0,\vec{x}_1)\cdots\Psi_{z_n}(0,\vec{x}_n)\,,\quad n=0,1,2,\ldots \right\} \tag{2.79}$$

darstellbar <30>:

$$\langle a| = \sum_n \sum_{z_1\cdots z_n} \int \sigma_n\left(\begin{matrix}\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\\ z_1 \quad\; z_n\end{matrix}\,|a\right) \langle 0|\Psi_{z_1}(\vec{x}_1)\cdots\Psi_{z_n}(\vec{x}_n)\, d^3x_1\cdots d^3x_n \tag{2.80}$$

Für den Rest dieses Kapitels vereinbaren wir, daß stets $x_1^o=\ldots x_n^o=0$ gilt. Wir werden jedoch aus schreibtechnischen Gründen weiterhin den allgemeinen Gesamtindex $I\equiv Z,x$ verwenden und die entsprechenden Formeln deshalb mit dem Zusatz "t=0" versehen. Auch wollen wir voraussetzen, daß die Basis (2.79) antisymmetrisiert ist, und somit können wir unsere Diskussion des inneren Produkts auf antisymmetrische Funktionen $\sigma_n(I_1,\ldots,I_n|a)_{t=0}$ beschränken.

Mit (2.80) erhalten wir für das innere Produkt zweier Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$

$$\langle a|b\rangle = \sum_n \sum_{I_1\cdots I_n} G_n(I_1,\ldots,I_n|a)\,\langle 0|\Psi_{I_1}\cdots\Psi_{I_n}|b\rangle_{t=0}$$

$$= \sum_{n,m} \sum_{\substack{I_1\cdots I_n \\ I'_1\cdots I'_m}} G_n(I_1,\ldots,I_n|a)\,G_m(I'_1,\ldots,I'_m|b)^* \cdot$$

$$\cdot\,\langle 0|\Psi_{I_1}\cdots\Psi_{I_n}[\Psi_{I'_1}\cdots\Psi_{I'_m}]^+|0\rangle_{t=0} \qquad (2.81)$$

In dieser Formel erscheint der metrische Tensor

$$G_{nm}(I_1\cdots I_n, I'_1\cdots I'_m)_{t=0} := \langle 0|\Psi_{I_1}\cdots\Psi_{I_n}\Psi^+_{I'_m}\cdots\Psi^+_{I'_1}|0\rangle_{t=0} \qquad (2.82)$$

der die Struktur des Raumes V beschreibt. Die explizite Gestalt des metrischen Tensors können wir nur bestimmen, wenn die Theorie gelöst ist und wir auch die Feldoperatoren Ψ_I kennen.
Wir führen deshalb (formal) eine zu (2.79) duale Basis

$$|K_1\ldots K_m\rangle_{t=0} \qquad (2.83)$$

ein, welche durch die Orthogonalitätsrelation

$$\langle 0|\Psi_{I_1}\cdots\Psi_{I_n}|K_1\ldots K_m\rangle_{t=0} = \frac{1}{n!}\,\delta_{nm}\sum_{p\in S_n}\mathrm{sgn}(p)\,\delta_{I_1K_{p(1)}}\cdots\delta_{I_nK_{p(m)}} \qquad (2.84)$$

definiert ist. Hierzu setzen wir voraus, daß G^{-1} existiert, und wie I sind auch K_i (i=1,...,n) entsprechende Vielfachindizes.
In dieser Basis hat der Zustand |b> die Darstellung

$$|b\rangle = \sum_n \sum_{K_1\ldots K_n} \tau_n(K_1,\ldots,K_n|b)\,|K_1\ldots K_n\rangle_{t=0} \qquad (2.85)$$

mit den antisymmetrischen "Koeffizientenfunktionen"

$$\tau_n(I_1,\ldots,I_n|b)_{t=0} = \langle 0|\Psi_{I_1}\ldots\Psi_{I_n}|b\rangle_{t=0}\ , \qquad (2.86)$$

wie man durch Multiplikation von (2.85) mit der originalen Basis nachrechnet. Diese Funktionen τ_n spielen bei der Darstellung eines Zustands im Funktionalraum eine wichtige Rolle (siehe Kapitel 3).
In gleicher Weise finden wir für die Funktionen σ_n durch Multiplikation von (2.80) mit der dualen Basis

$$\sigma_n(K_1,\ldots,K_n|a)_{t=0} = \langle a|K_1\ldots K_n\rangle_{t=0} \quad , \tag{2.87}$$

und durch Inspektion von (2.81) oder auch durch direktes Ausrechnen können wir das innere Produkt $\langle a|b\rangle$ in der Form

$$\langle a|b\rangle = \sum_n \sum_{I_1\cdots I_n} \sigma_n(I_1,\ldots,I_n|a)\ \tau_n(I_1,\ldots I_n|b)_{t=0} \tag{2.88}$$

schreiben.
Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir mit

$$\langle\xi_n| := \langle 0|\Psi_{I_1}\cdots\quad\Psi_{I_n,t=o} \tag{2.89a}$$

ein Element der originalen Basis und mit

$$\vec{\sigma}(a) := (\sigma_n(I_1,\ldots,I_n|a)_{t=0} \ , \ n=0,1,\ldots) \tag{2.89b}$$

den zugehörigen "Koordinatenvektor".
Entsprechend definieren wir für die duale Basis

$$|\xi^n\rangle := |K_1\ldots K_n\rangle_{t=0} \tag{2.90a}$$

und

$$\vec{\tau}(a) := (\tau_n(K_1,\ldots,K_n|a)_{t=0} \ , \ n=0,1\ldots). \tag{2.90b}$$

In dieser verkürzten Schreibweise können wir einen Zustand $|a\rangle \in V$ in der Form

$$|a\rangle = \sigma_n^*(a)|\xi_n\rangle = \tau_n(a)|\xi^n\rangle \tag{2.91}$$

schreiben, und es ist

$$|\xi_n\rangle = \langle\xi_n|^+ = \Psi^+_{I_n} \ldots \Psi^+_{I_1} |0\rangle_{t=0}$$

und analog

$$\langle\xi^n| = |K_1 \ldots K_n\rangle^+_{t=0} \,. \tag{2.92}$$

Wie schon in (2.89a) steht der Index n für einen ganzen Satz von diskreten und kontinuierlichen Indizes, so gilt $n \hat{=} I_1,\ldots,I_n,t=0 \hat{=} Z_1,\vec{x}_1,\ldots,Z_n,\vec{x}_n$.
Der metrische Tensor (2.82) lautet in der verkürzten Form

$$G = G_{mn} = \langle\xi_m|\xi_n\rangle, \tag{2.93a}$$

und es gilt

$$\tilde{G} := G^{mn} := \langle\xi^m|\xi^n\rangle = G^{-1}. \tag{2.93b}$$

Entsprechend definieren wir die Matrixelemente des Operators H durch

$$\mathfrak{H} := H_{mn} := \langle\xi_m|H|\xi_n\rangle \tag{2.94a}$$

und

$$\tilde{\mathfrak{H}} := H^{mn} := \langle\xi^m|H|\xi^n\rangle. \tag{2.94b}$$

Die Eigenwertgleichung

$$H|b\rangle = E_b|b\rangle \quad \text{mit} \quad |b\rangle = \tau_n(b)|\xi^n\rangle \tag{2.95a}$$

führt dann nach Multiplikation mit $\langle\xi^m|$ zu der Gleichung

$$\tilde{\mathfrak{H}}\,\vec{\tau}(b) = E_b\,\tilde{G}\,\vec{\tau}(b)\,, \tag{2.95b}$$

und Multiplikation von (2.95a) mit $\langle\xi_m|$ ergibt

$$\hat{\tilde{\mathfrak{H}}}\,\vec{\tau}(b) = E_b\,\vec{\tau}(b). \tag{2.95c}$$

Hierbei ist

$$\hat{\tilde{\mathfrak{R}}} = \tilde{G}^{-1}\tilde{\mathfrak{R}} = G\tilde{\mathfrak{R}} = H_m{}^n = \langle \xi_m | H | \xi^n \rangle . \qquad (2.95d)$$

Analoges Vorgehen bei der Eigenwertgleichung

$$\langle a | H = E_a \langle a | \quad \text{mit} \quad \langle a | = \langle \xi_m | \sigma_m(a) \qquad (2.96a)$$

liefert nach Multiplikation mit $|\xi_n\rangle$ die Gleichung

$$\vec{\sigma}(a)\mathfrak{R} = E_a \vec{\sigma}(a)\, G \,, \qquad (2.96b)$$

und Multiplikation von (2.96a) mit $|\xi^n\rangle$ ergibt

$$\vec{\sigma}(a)\hat{\mathfrak{R}} = E_a \vec{\sigma}(a) \qquad (2.96c)$$

mit

$$\hat{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} G^{-1} = \langle \xi_m | H | \xi^n \rangle = H_m{}^n . \qquad (2.96d)$$

Es ist also $\hat{\tilde{\mathfrak{R}}} = \hat{\mathfrak{R}}$ (dies folgt auch aus $\tilde{\mathfrak{R}} = G^{-1}\mathfrak{R}G^{-1}$), und damit gilt das folgende Theorem <30>:

Theorem: Seien $\mathfrak{R}$ und $\tilde{\mathfrak{R}}$ duale Darstellungen des Hamiltonoperators H in V. Dann gilt für die gemischt ko-kontravariante Darstellung $\hat{\mathfrak{R}} = \hat{\tilde{\mathfrak{R}}}$, und für einen reellen Eigenwert sind $\vec{\tau}(a)$ und $\vec{\sigma}(a)$ eine Rechts- beziehungsweise Linkslösung derselben Gleichung.

Betrachten wir die Gleichungen (2.95c) und (2.96c) näher, so stellen wir fest, daß sie formal dieselbe Struktur aufweisen wie entsprechende Gleichungen in einem Raum mit positiver Metrik unter Verwendung einer Orthonormalbasis. Allerdings ist $\hat{\mathfrak{R}}$ auch für einen hermiteschen Operator H im allgemeinen nicht hermitesch, denn wegen

$$\hat{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \cdot G^{-1}$$

folgt

$$\hat{\mathcal{H}}' = G^{-1}\mathcal{H} = G^{-1}\hat{\mathcal{H}}\,G, \tag{2.97}$$

und selbst wenn G Diagonalgestalt hat, ist üblicherweise
$G\hat{\mathcal{H}} \neq \hat{\mathcal{H}}\,G$.
Wir wollen als Ergebnis festhalten, daß wir mit (2.88) das innere Produkt

$$\langle a|b\rangle = \vec{\sigma}(a)\vec{\tau}(b) = \sigma_n(a)\tau_n(b) \tag{2.98a}$$

zweier (Energie-) Eigenzustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ als Produkt der Links- und Rechtslösungen

$$\vec{\sigma}(a)\hat{\mathcal{H}} = E_a\vec{\sigma}(a) \qquad \text{und} \qquad \hat{\mathcal{H}}\,\vec{\tau}(b) = E_b\vec{\tau}(b) \tag{2.98.b}$$

schreiben können. Versucht man allerdings, die Norm eines Eigenzustandes nur über die Gleichung (2.98b) zu bestimmen, so bleibt auch bei einem reellen, nichtentarteten Eigenwert zumindest ein Phasenfaktor unbekannt. Auf diesen Punkt werden wir in Kapitel 4 anhand eines Beispiels zurückkommen.

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir uns der renormierten Energiegleichung zuwenden.
Wir definieren die Operatoren

$$A_n := \Psi_{I_1} \ldots \Psi_{I_n,t=o} \tag{2.99}$$

und können damit ein Element der Basis (2.79) in der Form

$$\langle \xi_n| = \langle 0|A_n$$

schreiben. Für die Matrixelemente $\langle 0|A_nH - HA_n|b\rangle$
mit $|b\rangle$ wie in (2.95) erhalten wir

$$\langle 0|\, A_n H - H A_n\,|b\rangle = \langle 0|\, A_n H|b\rangle - \langle 0|\, H A_n\,|b\rangle$$

$$= (E_b - E_0)\ \langle 0|\, A_n\,|b\rangle$$

$$= (E_b - E_0)\ \tau_n(b) \qquad (2.100)$$

und

$$\langle 0|\, A_n H - H A_n\,|b\rangle = \langle 0|\, A_n H - H A_n|\xi^m\rangle\ \tau_m(b)$$

$$= \langle 0|\, A_n (H - A_n^{-1} H A_n)|\xi^m\rangle\ \tau_m(b)$$

$$= \langle \xi_n|\, H - A_n^{-1} H A_n|\xi^m\rangle\ \tau_m(b) \qquad (2.101)$$

(keine Summation beziehungsweise Integration über den Vielfachindex n).

Die Funktionen $\tau_n(b)$ sind folglich auch eine Rechtslösung der renormierten Energiegleichung

$$\langle \xi_n|\, H - A_n^{-1} H A_n|\xi^m\rangle\ \tau_m(b) = (E_b - E_0)\ \tau_n(b) \qquad (2.102)$$

(keine Summation über n)

zum Eigenwert $E_b - E_0$.

Entsprechend sind die Funktionen $\sigma_n(a)$ (vgl. (2.96)) eine Linkslösung dieser Gleichung zum Eigenwert $E_a - E_0$, denn es gilt

$$\sigma_n(a)\ \langle \xi_n|\, H - A_n^{-1} H A_n|\xi^m\rangle$$

$$= \sigma_n(a)\ \langle \xi_n|\, H|\xi^m\rangle - \sigma_n(a)\ \langle \xi_n|\, A_n^{-1} H A_n|\xi^m\rangle$$

$$= \sigma_m(a)\ E_a - \sigma_n(a)\ \langle 0|\, H A_n|\xi^m\rangle$$

$$= \sigma_m(a)\ E_a - \sigma_n(a)\ \langle \xi_n|\xi^m\rangle\ E_0$$

$$= \sigma_m(a)\ (E_a - E_0)\ . \qquad (2.103)$$

Wir können somit das innere Produkt zweier Energieeigenzustände nicht nur als Produkt von Links- und Rechtslösung der Gleichung (2.98b) schreiben, sondern auch als Produkt der Links- und Rechtslösung der renormierten Energiegleichung (2.102). Dies ist von entscheidender Bedeutung für die Definition des inneren Produkts im Funktionalraum.

3. FUNKTIONALRAUM

Ein Funktional ist eine Funktion, deren Argumente selbst skalar- oder operatorwertige Funktionen sind. Beispiele hierfür sind unter anderem Lagrange- und Hamiltonfunktion und das Wirkungsfunktional. Mit Extremalproblemen für Funktionale befaßt sich die Variationsrechnung, und hier sind an erster Stelle EULER und LAGRANGE zu nennen. Bekanntlich führt die Extremwertsbedingung für das Wirkungsfunktional auf die Euler-Lagrange-Gleichungen. Einen kurzen Überblick über die weitere Anwendung von Funktionalen in der Physik finden wir bei STUMPF <24c>: Als erster benutzte VOLTERRA <43> Funktionale systematisch für die Entwicklung physikalischer Theorien. Desweiteren wurden Funktionale von WIENER <44> bei der Untersuchung der Brownschen Bewegung, von FOCK <45> und FEYNMAN <46> in der nichtrelativistischen Quantentheorie und von BOGOLJUBOV <47> und LUX und MÜNSTER <48> in der statistischen Mechanik verwendet. In der Quantenfeldtheorie wurden Funktionale und Funktionalgleichungen von SCHWINGER <49> eingeführt. Die Benutzung des Funktionalbegriffs zur Formulierung einer umfassenden funktionalen Quantentheorie wurde von STUMPF <24> vorgeschlagen und weiterentwickelt.
In diesem Formalismus sind weniger die Feldoperatoren als vielmehr die Zustände beziehungsweise die Matrixelemente $\langle 0|T\Psi_{I_1}\dots\Psi_{I_n}|a\rangle$ und $\langle 0|N\Psi_{I_1}\dots\Psi_{I_n}|a\rangle$, welche einen Zustand $|a\rangle$ charakterisieren, die entscheidenden Größen. Da es sich hierbei um Übergangsmatrixelemente zwischen $|a\rangle$ und dem Vakuum $|0\rangle$ handelt, führt die Berechnung von Eigenwerten automatisch zur Berechnung der renormierten Eigenwerte. Wir erhalten zum Beispiel bei der Bestimmung eines Energieeigenwertes als Ergebnis die Energiedifferenz E_a-E_0 .

Die so eingeführte funktionale Quantentheorie ist nicht nur ein Formalismus. Vielmehr gestattet sie zwanglos die Definition und Einführung von relativistischen Clustern <24a,d>, und sie ermöglicht darüberhinaus die sogenannte "schwache Abbildung" der mikroskopischen Theorie auf eine phänomenologische Theorie im

Gegensatz zu den Versuchen, eine solche Abbildung mit Feldoperatoren durchzuführen ("starke Abbildung") <50>.
Kapitel 3 enthält die Grundlagen der funktionalen Quantentheorie <24> und deren Anwendung auf das in dieser Arbeit untersuchte Preonenmodell.

3.1 Grundlagen

Wir konstruieren eine Abbildung des Zustandsraums V auf einen Funktionalraum V_F , indem wir jedem Zustand $a \in V$ einen Funktionalzustand $|T(j,a)\rangle \in V_F$ zuordnen. Hierzu beschreiben wir einen Zustand $|a\rangle$ des Systems, das durch die Feldgleichung (2.63) bestimmt ist, durch den unendlichen Satz von Matrixelementen

$$\tau(I_1,\ldots,I_n|a) := \langle 0|T\Psi_{Z_1}(x_1)\ldots\ \Psi_{Z_n}(x_n)|a\rangle$$
$$\text{mit } n = 0,1,2,\ldots \qquad (3.1)$$

Für verschiedene Zeiten $x_i^0 \neq x_j^0$ $(i\neq j)$ bewirkt der Zeitordnungsoperator T die Antisymmetrie dieser Matrixelemente bei Vertauschung von I_i und I_j. Hingegen ist das zeitgeordnete Produkt für gleiche Zeiten $x_i^0 = x_j^0$ $(i\neq j)$ nicht definiert, und deshalb vereinbaren wir, daß T als Antisymmetrisierer für solche Produkte von gleichzeitigen Feldoperatoren wirkt. Gehen wir zum einzeitigen antisymmetrischen Limes $x_1^0=x_2^0=\ldots=x_n^0=t$ über, so stimmen die Matrixelemente (3.1) mit den in (2.85/86) definierten Koeffizientenfunktionen überein:

$$\tau(I_1,\ldots,I_n|a)_{t=0} = \tau_n(I_1,\ldots,I_n|a)_{t=0} \qquad (3.2)$$

Die sogenannten τ-Funktionen (3.1) können als kovariante Darstellung des Zustands $|a\rangle$ bezeichnet werden <51,11>. Sie transformieren sich unter Poincarêtransformationen wie das direkte Produkt von Dirac-Spinoren gemäß <39>

$$\langle 0 | T\, \Psi_{z_1}(x_1') \cdots \Psi_{z_n}(x_n') | a \rangle$$

$$= L_{z_1 z_1'}(\Lambda) \cdots L_{z_n z_n'}(\Lambda)\ \langle 0 | T\, \Psi_{z_1'}(\Lambda^{-1}(x_1' - b)) \cdots \Psi_{z_n'}(\Lambda^{-1}(x_n' - b)) | a \rangle \tag{3.3}$$

Dem Zustand $|a\rangle \in V$ wird das erzeugende Funktional

$$T(j, a) := \langle 0 | T \exp(i \Psi_I j_I) | a \rangle$$

$$:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{I_1 \cdots I_n} \langle 0 | T\, \Psi_{I_1} \cdots \Psi_{I_n} | a \rangle\ j_{I_1} \cdots j_{I_n} \tag{3.4}$$

mit den funktionalen Quellen j_I zugeordnet. Die Operatoren j_I sind die Generatoren einer unendlich-dimensionalen Grassmann-algebra.
Die Funktionalableitung

$$\partial_I := \frac{\delta}{\delta j_I} \tag{3.5}$$

ist ebenfalls ein Element dieser Algebra, und es gelten die Antivertauschungsrelationen

$$\{\partial_I , \partial_{I'}\} = \{j_I , j_{I'}\} = 0$$

und

$$\{j_I , \partial_{I'}\} = \delta_{II'} = \delta_{ZZ'}\, \delta(x - x') . \tag{3.6}$$

Eine Darstellung solcher Operatoren kann mittels einer Jordan - Wigner - Algebra direkt konstruiert werden <52>. Führen wir den funktionalen Grundzustand $|0\rangle_F$ durch

$$\partial_I |0\rangle_F = 0 \tag{3.7}$$

ein, so erhalten wir eine Fockraum-Darstellung dieser Algebra, und j_I und ∂_I können als funktionale Erzeuger beziehungsweise Vernichter mit

$$\partial_I = j_I^+ \tag{3.8}$$

interpretiert werden <24c>.
Im folgenden werden wir den physikalischen Grundzustand $|0\rangle$ und den funktionalen Grundzustand $|0\rangle_F$ mit dem gemeinsamen Symbol $|0\rangle$ bezeichnen, da aus dem Zusammenhang hervorgeht, um welchen Zustand es sich handelt.

Dem Element $T(j,a)$ der Grassmannalgebra und damit auch dem Zustand $|a\rangle \in V$ können wir nun den Funktionalzustand

$$\begin{aligned} |T(j,a)\rangle &:= T(j,a)|0\rangle \\ &= \sum_n \frac{i^n}{n!}\, \tau(I_1,\ldots,I_n|a)\, j_{I_1}\cdots j_{I_n}|0\rangle \end{aligned} \tag{3.9}$$

im Funktionalraum V_F zuordnen.

Die hierbei auftretenden τ-Funktionen sind nach Konstruktion antisymmetrisch. Wir bemerken jedoch, daß wir bei jedem Zustand der Gestalt (3.9) mit beliebigen Koeffizientenfunktionen $f_n = f_n(I_1,\ldots,I_n)$ diese Funktionen durch ihre antisymmetrischen Anteile

$$f_n^a(I_1,\ldots,I_n) := \frac{1}{n!}\sum_{p\in S_n} (\operatorname{sgn} p)\, f_n(I_{p(1)},\ldots,I_{p(n)}) \tag{3.10}$$

ersetzen können. Dies folgt aus den Antivertauschungsrelationen (3.6). Ebenfalls mit Hilfe von (3.6) erhalten wir

$$\partial_k\, j_{I_1}\cdots j_{I_n}|0\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1}\, \delta_{kI_\ell}\, j_{I_1}\cdots j_{I_{\ell-1}}\, j_{I_{\ell+1}}\cdots j_{I_n}|0\rangle \tag{3.11}$$

und

$$\langle 0|\partial_{I_m}\cdots\partial_{I_1}\, j_{k_1}\cdots j_{k_n}|0\rangle = \delta_{nm}\sum_{p\in S_n}(\operatorname{sgn} p)\,\delta_{I_1 k_{p(1)}}\cdots\delta_{I_n k_{p(n)}}. \tag{3.12}$$

Hieraus folgt, daß

$$\mathcal{E} := \sum_n \frac{1}{n!}\, j_{I_1}\cdots j_{I_n}|0\rangle\langle 0|\partial_{I_n}\cdots\partial_{I_1} \tag{3.13}$$

der Eins-Operator im Funktionalraum ist:

$$\mathcal{E}\, j_{I_1} \cdots\ j_{I_n}|0\rangle = j_{I_1} \cdots\ j_{I_n}|0\rangle \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.14}$$

Insbesondere wirkt $\mathcal{E}$ wegen (3.11) gleichzeitig als Antisymmetrisierer. So gilt für einen beliebigen Funktionalzustand

$$|F(j)\rangle := \sum_n \frac{i^n}{n!} f_n(I_1,\ldots,I_n)\, j_{I_1} \cdots\ j_{I_n}|0\rangle \tag{3.15a}$$

einerseits

$$\mathcal{E}\,|F(j)\rangle = |F(j)\rangle \tag{3.15b}$$

und andererseits

$$\mathcal{E}\,|F(j)\rangle = \sum_n \frac{i^n}{n!} f_n^a(I_1,\ldots,I_n)\, j_{I_1} \cdots\ j_{I_n}|0\rangle\ . \tag{3.15c}$$

Hieraus wird noch einmal deutlich, daß wir jeden Funktionalzustand o.B.d.A. mit antisymmetrischen Koeffizientenfunktionen schreiben können. Durch Multiplikation mit $\frac{1}{i^m}\langle 0|\partial_{I_m} \cdots\ \partial_{I_1}$ erhalten wir diese Funktionen aus dem Funktionalzustand (3.15a) zurück:

$$\frac{1}{i^m}\langle 0|\partial_{I_m} \cdots\ \partial_{I_1}|F(j,a)\rangle = f_m(I_1,\ldots,I_m) \tag{3.16}$$

Um im Funktionalraum eine Quantentheorie zu formulieren, müssen wir in der Lage sein , die Strukturen des Zustandsraums mittels der Abbildung

$$V \longrightarrow V_F \ :\ |a\rangle \longrightarrow |T(j,a)\rangle \tag{3.17}$$

in den Funktionalraum zu übertragen. Insbesondere muß auch der Funktionalraum eine Darstellung $U_F = U_F(\Lambda,b)$ der Poincarégruppe tragen. Die funktionalen Operatoren transformieren sich gemäß <40>

$$U_F^{-1}\; j_z(x)\, U_F \;=\; L^{-1}_{z'z}(\Lambda)\;\; j_{z'}\left(\Lambda^{-1}(x-b)\right)\;, \tag{3.18}$$

und daher erhalten wir mit $U_F|0\rangle = |0\rangle$ und (3.3) für einen Funktionalzustand das gewohnte Transformationsverhalten <39>

$$|T(j,a')\rangle' = U_F|T(j,a)\rangle\;. \tag{3.19}$$

Als nächstes übertragen wir die Eigenwertbedingungen (2.77) in den Funktionalraum. Hierzu definieren wir die Operatoren

$$\mathfrak{P}_\mu \;:=\; -\int j_z(x)\; P_\mu(x)\; \partial_z(x)\quad dx\;,$$

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu} \;:=\; -\int j_z(x)\; \mathfrak{M}_{\mu\nu,zz'}(x)\; \partial_{z'}(x)\; dx\;,$$

$$\mathfrak{G}_\mu \;:=\; \frac{1}{2m}\;\varepsilon_{\mu\nu\sigma\varrho}\,\mathfrak{M}^{\nu\sigma}\,\mathfrak{P}^{\varrho}$$

und

$$\mathfrak{W} \;:=\; \mathfrak{G}_\mu\,\mathfrak{G}^\mu \tag{3.20}$$

mit P und M wie in (2.73).

Ist $|a\rangle$ ein gemeinsamer Eigenzustand der Operatoren $\hat{P}^2$, $\hat{P}_\mu$, $\hat{W}$ und $\hat{\Gamma}_3$ (vgl. (2.77)), so erfüllt der Funktionalzustand $|T(j,a)\rangle$ die Eigenwertgleichungen <39>

$$\mathfrak{P}^2\;|T(j,a)\rangle = m^2|T(j,a)\rangle\;,$$

$$\mathfrak{P}_\mu\;|T(j,a)\rangle = p_\mu|T(j,a)\rangle\;,$$

$$\mathfrak{W}\;|T(j,a)\rangle = s(s+1)|T(j,a)\rangle$$

und

$$\mathcal{G}_3 \,|T(j,a) = s_3 |T(j,a)\rangle \ . \qquad (3.21)$$

Wir erhalten dieses Ergebnis mit (2.73) und unter Berücksichtigung von

$$\int dx\ j_z(x)\ g(x)\ \partial_z(x)\ |T(j,a)\rangle$$

$$= \sum_n \frac{i^n}{n!} \int \sum_{\ell=1}^{n} g(x_\ell)\ \langle 0|T\,\Psi_{z_1}(x_1)\cdots\Psi_{z_n}(x_n)|a\rangle \cdot$$

$$\cdot\ j_{z_1}(x_1)\cdots\ j_{z_n}(x_n)\,|0\rangle\, dx_1\cdots dx_n . \qquad (3.22)$$

Wie bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt, handelt es sich bei den Eigenwerten in (3.21) um (renormierte) Differenzen von Eigenwerten, so gilt zum Beispiel $p_0=E_a-E_0$.

3.2 Feldgleichung und Eigenwertgleichung

Wir wenden den Operator $\frac{1}{i}\partial_K \equiv \frac{1}{i}\partial_Z(x)$ auf den Funktionalzustand $|T(j,a)\rangle$ an und erhalten mit (3.11)

$$\frac{1}{i}\,\partial_K\,|T(j,a)\rangle$$

$$= \sum_n \frac{i^{n-1}}{n!} \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1}\, \delta_{KI_\ell}\, \tau(I_1,\ldots,I_n|a)\ j_{I_1}\cdots j_{I_{\ell-1}}\, j_{I_{\ell+1}}\cdots j_{I_n}\,|0\rangle$$

$$= \sum_n \frac{i^n}{n!}\ \tau(K,I_1,\ldots,I_n|a)\ j_{I_1}\cdots\ j_{I_n}\,|0\rangle \ . \qquad (3.23)$$

Bei der letzten Zeile haben wir die Antisymmetrie der τ-Funktionen verwendet und eine Umbenennung der Indizes und Variablen, über welche summiert beziehungsweise integriert wird, durchgeführt. In dieser Form können wir den Operator

$D^{\mu}_{ZZ'}\partial_{\mu} - M_{ZZ'}$

aus Gleichung (2.63) anwenden. Die einzige Schwierigkeit ist die Zeitableitung ∂_0 des in den τ-Funktionen enthaltenen zeitgeordneten Produkts. Diese Zeitableitung wurde von STUMPF <40> explizit durchgeführt und lautet im vorliegenden Fall

$$\frac{\partial}{\partial x_0} T \Psi_I \Psi_{I_1} \cdots \Psi_{I_n}$$

$$= T\left(\frac{\partial}{\partial x_0} \Psi_I\right) \Psi_{I_1} \cdots \Psi_{I_n}$$

$$- \sum_{r=1}^{n} (-1)^r A_{II_r} T \Psi_{I_1} \cdots \Psi_{I_{r-1}} \Psi_{I_{r+1}} \cdots \Psi_{I_n} . \qquad (3.24)$$

Die Zeitableitung wirkt auf die Variable x beziehungsweise auf den Operator $\Psi_I \equiv \Psi_Z(x)$, und $A_{II'}$ ist die Verallgemeinerung der Matrix $A_{ZZ'}$ in den Antivertauschungsrelationen (2.59):

$$A_{II'} := A_{ZZ'}\,\delta(x-x') \qquad (3.25)$$

Die Feldgleichung für das zeitgeordnete Produkt $T\Psi_I\Psi_{I_1}\cdots\Psi_{I_n}$ lautet damit

$$\left(D^{\mu}_{Z_1Z_2}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - M_{Z_1Z_2}\right) T \Psi_{Z_2}(x) \Psi_{Z_1'}(x_1') \cdots \Psi_{Z_n'}(x_n')$$

$$= U_{Z_1Z_2Z_3Z_4}\, T \Psi_{Z_2}(x) \Psi_{Z_3}(x) \Psi_{Z_4}(x) \Psi_{Z_1'}(x_1') \cdots \Psi_{Z_n'}(x_n')$$

$$- \sum_{r=1}^{n} (-1)^r D^{0}_{Z_1Z_2} A_{Z_2Z_r'} T\,\delta(x-x_r') \cdot$$

$$\cdot \Psi_{Z_1'}(x_1') \cdots \Psi_{Z_{r-1}'}(x_{r-1}') \Psi_{Z_{r+1}'}(x_{r+1}') \cdots \Psi_{Z_n'}(x_n') . \qquad (3.26)$$

Da der Operator $D^{\mu}\partial_{\mu} - M$ nur auf die Feldoperatoren Ψ_I wirkt, nicht jedoch auf die Zustände $|a\rangle$ und $|0\rangle$, erfüllen auch die

τ-Funktionen $\tau(I, I'_1, \ldots, I'_n | a)$ diese Gleichung.

Berücksichtigen wir

$$\frac{1}{i}\partial_{k_1}\ \frac{1}{i}\partial_{k_2}\ \frac{1}{i}\partial_{k_3}\ |T(j,a)\rangle$$

$$= \sum_n \frac{i^n}{n!}\ \tau(k_3, k_2, k_1, I_1, \ldots I_n | a)\ j_{I_1} \cdots j_{I_n} |0\rangle\ , \qquad (3.27)$$

so finden wir schließlich als Ergebnis die Funktionalgleichung <1>

$$\left(D^{\mu}_{z_1 z_2}\partial_{\mu} - M_{z_1 z_2}\right)\frac{1}{i}\partial_{z_2}(x)\ |T(j,a)\rangle$$

$$= i\ U_{z_1 z_2 z_3 z_4}\ \partial_{z_4}(x)\ \partial_{z_3}(x)\ \partial_{z_2}(x)\ |T(j,a)\rangle$$

$$+ i\ D^{\circ}_{z_1 z_2}\ A_{z_2 z_3}\ j_{z_3}(x)\ |T(j,a)\rangle\ . \qquad (3.28)$$

Unter Verwendung der Eigenwertbedingungen (3.21) und anschließender Multiplikation mit $i^{-m}\langle 0|\partial_{I_m}\ldots\partial_{I_1}$ können wir als Eigenwertproblem ein unendliches, gekoppeltes Gleichungssystem für die τ-Funktionen ableiten. Besonders leicht sind die Eigenwertgleichungen für $\Im_{\mu}$ aufzustellen, da auf Grund der Zerlegung der Feldgleichung höherer Ordnung in ein System von Gleichungen erster Ordnung auch die Funktionalgleichung (3.28) nur Ableitungen erster Ordnung enthält.

Zur Berechnung des Energieeigenwerts $E = E_a - E_0$ des Operators $\Im_0$ eliminieren wir unter Berücksichtigung von

$$D^0_{Z_1 Z} \, D^0_{Z Z_2} = -\delta_{Z_1 Z_2}$$

und (vgl.(3.20) und (3.21))

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 |T(j,a)\rangle &= \int dx \; j_Z(x) \, i \, \partial_0 \, \partial_Z(x) \; |T(j,a)\rangle \\ &= E|T(j,a)\rangle \end{aligned} \tag{3.29}$$

in (3.28) die Zeitableitung.

Die hieraus resultierende funktionale Eigenwertgleichung lautet

$$\begin{aligned} & E|T(j,a)\rangle \\ &= \int dx \; j_{Z_1}(x) \, i \, D^{\circ}_{Z_1 Z_2} \left(D^{k}_{Z_2 Z_3} \, \partial_k - M_{Z_2 Z_3} \right) \partial_{Z_3}(x) \; |T(j,a)\rangle \\ &\quad + \int dx \; j_{Z_1}(x) \, i \, D^{\circ}_{Z_1 Z_2} \, U_{Z_2 Z_3 Z_4 Z_5} \, \partial_{Z_5}(x) \, \partial_{Z_4}(x) \, \partial_{Z_3}(x) \, |T(j,a)\rangle \\ &\quad - \int dx \; j_{Z_1}(x) \, i \, A_{Z_1 Z_2} \; j_{Z_2}(x) \; |T(j,a)\rangle \, . \end{aligned} \tag{3.30}$$

Der letzte Term iD^0Aj in Gleichung (3.28) und entsprechend der Term $jiAj$ in der Eigenwertgleichung (3.30) führen zu δ-Funktionen, die sich nicht herausintegrieren. Aus diesem Grund gehen wir in Abschnitt 3.3 zu den sogenannten φ-Funktionen <53> über, mit deren Hilfe wir dann auch die konkreten Rechnungen durchführen werden.

3.3 Normaltransformation

Der Übergang zu den φ-Funktionen erfolgt durch die Normaltransformation <24c> des Funktionalzustands $|T(j,a)\rangle$.
Wir definieren

$$|F(j,a)\rangle := \exp\{\tfrac{1}{2} j_{I_1} F_{I_1 I_2} j_{I_2}\}|T(j,a)\rangle , \tag{3.21}$$

wobei

$$F_{I_1 I_2} = F_{Z_1 Z_2}(x_1, x_2)$$

$$:= \langle 0|T\Psi^f_{Z_1}(x_1)\,\Psi^f_{Z_2}(x_2)|0\rangle \tag{3.22}$$

der Propagator der freien Theorie ist (siehe auch Anhang B).

Die Feldoperatoren Ψ^f erfüllen die freie Gleichung

$$(D^\mu \partial_\mu - M)\Psi^f = 0, \tag{3.33}$$

und mit (3.24) erhalten wir

$$(D^{\wedge}_{Z_1 Z_2} \frac{\partial}{\partial x^{\wedge}} - M_{Z_1 Z_2})\, F_{Z_2 Z'}(x,x') = D^{\circ}_{Z_1 Z_2} A_{Z_2 Z'}\, \delta(x-x'). \tag{3.34}$$

Indem wir (3.31) nach Potenzen von j ordnen, können wir $|F(j,a)\rangle$ in der gewohnten Form

$$|F(j,a)\rangle = \sum_n \frac{i^n}{n!} \sum_{I_1 \cdots I_n} \varphi(I_1,\ldots,I_n|a)\, j_{I_1} \cdots j_{I_n} |0\rangle \tag{3.35}$$

schreiben mit

$$\varphi(I_1,\ldots,I_n|a) := \langle 0|N\Psi_{I_1} \ldots \Psi_{I_n}|a\rangle . \tag{3.36}$$

Diese φ-Funktionen können neben den τ-Funktionen als eine zweite kovariante Darstellung des Vektors $|a\rangle$ aufgefaßt werden <11>, und wie die τ-Funktionen können wir sie als antisymmetrisch voraussetzen. Im Falle wechselwirkungsfreier Felder ist (3.31) die bekannte Wickregel, und das Symbol "N" in (3.36) bedeutet die übliche Normalordnung. Dagegen erfolgt die Definition von "N" im Falle einer Theorie mit Wechselwirkung - und damit auch in unserem Modell - erst durch die Normaltransformation (3.31) <24e>.

Unter den Voraussetzungen von (3.21) erfüllt $|F(j,a)\rangle$ dieselben Eigenwertgleichungen wie $|T(j,a)\rangle$. So gilt <24c>

$$\mathfrak{P}^2 |F(j,a)\rangle = m^2 |F(j,a)\rangle \quad ,$$

$$\mathfrak{P}_\mu |F(j,a)\rangle = p_\mu |F(j,a)\rangle \quad ,$$

$$\omega |F(j,a)\rangle = s(s+1) |F(j,a)\rangle$$

und

$$\mathfrak{J}_3 |F(j,a)\rangle = s_3 |F(j,a)\rangle \quad . \tag{3.37}$$

Im Unterschied hierzu erfüllen die beiden Funktionalzustände $|T(j,a)\rangle$ und $|F(j,a)\rangle$ verschiedene Feldgleichungen. Aus (3.28) erhalten wir für $|F(j,a)\rangle$ die Gleichung <1>

$$\left(D^{\mu}_{z_1 z_2} \partial_\mu - M_{z_1 z_2} \right) \partial_{z_2}(x) \, |F(j,a)\rangle$$

$$= - U_{z_1 z_2 z_3 z_4} \, d_{z_4}(x) \, d_{z_3}(x) \, d_{z_2}(x) \, |F(j,a)\rangle \tag{3.38}$$

mit

$$d_z(x) \equiv d_I = \partial_I - F_{II'} \, j_{I'} \quad . \tag{3.39}$$

Die beiden Feldgleichungen (3.28) und (3.38) für den Funktionalzustand $|T(j,a)\rangle$ beziehungsweise $|F(j,a)\rangle$ unterscheiden sich also dadurch, daß Gleichung (3.38) den Term $D^0 Aj$, der zu Singularitäten führt, nicht mehr enthält, und an Stelle der funktionalen Operatoren ∂_I haben wir in der Wechselwirkung die Operatoren d_I zu schreiben. Diese Operatoren tragen nun aufgrund der Zweipunktfunktion F die Information über die Quantisierung der Theorie, die zuvor in A enthalten war. (Zur Erinnerung: die "Matrix" A entstammte den Antivertauschungsrelationen (2.59)). Wir weisen darauf hin, daß auch die Zweipunkt-"Funktion" F im allgemeinen eine Distribution ist und zu Singularitäten Anlaß gibt, allerdings sind diese Singularitäten für eine Theorie höherer Ordnung weniger schlimm.
Da $|T(j,a)\rangle$ und $|F(j,a)\rangle$ dieselben Eigenwertgleichungen erfüllen, gilt in Analogie zu (3.29) auch

$$\mathfrak{H}_0|F(j,a)\rangle = \int dx\; j_Z(x)\, i\partial_0\, \partial_Z(x)|F(j,a)\rangle$$
$$= E\,|F(j,a)\rangle\,, \qquad (3.40)$$

und wie schon in (3.28) können wir damit auch in der Feldgleichung (3.38) die Zeitableitung eliminieren. Wir finden als Ergebnis die Energieeigenwertgleichung für den Funktionalzustand $|F(j,a)\rangle$:

$$E\,|F(j,a)\rangle$$
$$= \int dx\; j_{z_1}(x)\, i\, D^0_{z_1 z_2}\,(D^4_{z_2 z_3}\,\partial_k - M_{z_2 z_3})\,\partial_{z_3}(x)\;|F(j,a)\rangle$$
$$+ \int dx\; j_{z_1}(x)\, i\, D^0_{z_1 z_2}\, U_{z_2 z_3 z_4 z_5}\, d_{z_5}(x)\, d_{z_4}(x)\, d_{z_3}(x)\;|F(j,a)\rangle \qquad (3.41)$$

Dieses Ergebnis erhält man auch durch direkte Anwendung der Normaltransformation auf die Eigenwertgleichung (3.30). Die beiden Eigenwertgleichungen (3.30) und (3.41) weisen natürlich dieselben Unterschiede auf wie die zugehörigen Feldglei-

chungen (3.28) und (3.38): Der zu Singularitäten führende Term jiAj ist in (3.41) weggefallen, und die Wechselwirkung enthält die Operatoren d_I anstelle ∂_I mit den bereits oben beschriebenen Konsequenzen.

3.4 Das innere Produkt

Bevor wir im nächsten Kapitel aus (3.41) die Gleichungen für einen Zweiteilchenbindungszustand ableiten, wollen wir das Konzept der funktionalen Quantentheorie vervollständigen. Wie bereits mehrfach betont, ist unser Ziel, vermöge der Abbildung

$$|a\rangle \longrightarrow |T(j,a)\rangle \tag{3.17}$$

oder der hierzu äquivalenten Abbildung

$$|a\rangle \longrightarrow |F(j,a)\rangle \tag{3.42}$$

im Funktionalraum V_F eine Quantentheorie zu formulieren.

Nachdem wir bisher Symmetriestrukturen, die Feldgleichungen und als Konsequenz hieraus die Energieeigenwertgleichung vom Zustandsraum in den Funktionalraum übertragen haben, fehlt noch die Definition des inneren Produkts im Funktionalraum.
Es gibt mehrere Möglichkeiten, im Funktionalraum ein inneres Produkt zu definieren. Insbesondere gibt es aufgrund der Relation (3.8) und der modellunabhängigen Antivertauschungsrelation (3.6) der Basisfunktionale auch ein modellunabhängiges Skalarprodukt im Funktionalraum. Dagegen haben wir gesehen, daß das innere Produkt des Zustandsraums von der Feldgleichung beziehungsweise Lagrangedichte des Spinorfeldmodells abhängt. Durch die Einführung der Funktionale und Funktionalzustände haben wir uns zwar weitgehend vom Zustandsraum V gelöst, jedoch betrachten wir weiterhin die Strukturen von V als die physi-

kalisch entscheidenden Strukturen für die Beschreibung unseres Modells. Wir fordern deshalb, daß die Abbildung (3.17) beziehungsweise (3.42) des Zustandsraums in den Funktionalraum isometrisch ist, und müssen folglich auch im Funktionalraum zu einem modellabhängigen inneren Produkt übergehen <28,29>. Wir wollen uns hierbei auf die Angabe der Norm von Eigenzuständen beschränken und kehren hierzu noch einmal zu der Eigenwertgleichung (3.30) für den Funktionalzustand $|T(j,a)\rangle$ zurück. Durch Multiplikation mit $i^{-n}\langle 0|\partial_{I_n}\dots\partial_{I_1}$ und Übergang zu der einzeitigen Theorie erhalten wir hieraus die renormierte Energiegleichung (2.102). Die Äquivalenz der einzeitigen Funktionaltheorie und des Hamiltonformalismus (vgl. Abschnitt 2.6) wurde von MAISON und STUMPF <27> am Beispiel des anharmonischen Oszillators nachgewiesen.
Wir erinnern uns, daß wir mit (2.98a) die Norm eines Zustands als Produkt von Links- und Rechtslösung der renormierten Energiegleichung schreiben können. Deshalb definieren wir den zu $|T(j,a)\rangle$ dualen Funktionalzustand

$$\langle S(\partial,a)| = \sum_n (-i)^n \sigma(I_1,\dots,I_n|a)\,\langle 0|\partial_{I_n}\cdots\partial_{I_1} \qquad (3.43)$$

als Linkslösung der Eigenwertgleichung (3.30) <29>

$$\begin{aligned}\langle S(\partial,a)|\,E &= \langle S(\partial,a)|\int dx\, j_{z_1}(x)\,i\,D^0_{z_1z_2}\left(D^k_{z_2z_3}\partial_k - M_{z_2z_3}\right)\partial_{z_3}(x)\\ &+ \langle S(\partial,a)|\int dx\, j_{z_1}(x)\,i\,D^0_{z_1z_2}\,U_{z_2z_3z_4z_5}\,\partial_{z_5}(x)\,\partial_{z_4}(x)\,\partial_{z_3}(x)\\ &- \langle S(\partial,a)|\int dx\, j_{z_1}(x)\,i\,A_{z_1z_2}\,j_{z_2}(x)\ ,\end{aligned} \qquad (3.44)$$

so daß wir nach Multiplikation von (3.44) mit $(-i)^{-n}j_{I_1}\dots j_{I_n}|0\rangle$ von rechts und Übergang zur einzeitigen Theorie die Linkslösung der renormierten Energiegleichung

(2.103) reproduzieren.
Wir können also auch mit Hilfe des Funktionalkalküls die Norm des Zustands $|a\rangle$ als Produkt von Links- und Rechtslösung der funktionalen Eigenwertgleichung schreiben, und es gilt

$$\langle a|a\rangle = \langle S(\partial,a)|T(j,a)\rangle_{t=0}$$

$$:= \sum_n \sigma(I_1,\ldots,I_n|a)_{t=0}\,\tau(I_1,\ldots,I_n|a)_{t=0} \qquad (3.45)$$

mit

$$\mathfrak{F}_0(j,\partial)\,|T(j,a)\rangle = E\,|T(j,a)\rangle \qquad (3.46a)$$

und

$$\langle S(\partial,a)|\,\mathfrak{F}_0(j,\partial) = \langle S(\partial,a)|\,E\ . \qquad (3.46b)$$

Die Abbildung (3.17) oder (3.42) reicht folglich nicht aus, um einen Zustand $|a\rangle \in V$ im Funktionalraum zu charakterisieren. Es bedarf dazu zusätzlich der Angabe des zu $|T(j,a)\rangle$ dualen Funktionalzustands $\langle S(\partial,a)$ oder des zu $|F(j,a)\rangle$ dualen Zustands

$$\langle S^F(\partial,a)| := \sum_n (-i)^n \sigma^F(I_1,\ldots,I_n|a)\,\langle 0|\partial_{I_n}\cdots\partial_{I_1}\ . \qquad (3.47)$$

Die bisherige Argumentation bleibt auch in diesem Fall gültig, und wir können die Norm $\langle a|a\rangle$ somit in der Form

$$\langle a|a\rangle = \langle S^F(\partial,a)|F(j,a)\rangle_{t=0}$$

$$:= \sum_n \sigma^F(I_1,\ldots,I_n|a)_{t=0}\,\varphi(I_1,\ldots,I_n|a)_{t=0} \qquad (3.48)$$

schreiben, wobei $\langle S^F(\partial,a)|$ und $|F(j,a)\rangle$ ebenfalls Links- und Rechtslösungen von Gleichung (3.46) sind. Gleichung (3.46b) lautet dann mit (3.41)

$$\langle S^F(\partial,a) \mid E$$

$$= \langle S^F(\partial,a) \mid \int dx\; j_{z_1}(x)\, i\, D^0_{z_1 z_2} \left(D^k_{z_2 z_3}\, \partial_k - M_{z_2 z_3} \right) \partial_{z_3}(x)$$

$$+ \langle S^F(\partial,a) \mid \int dx\; j_{z_1}(x)\, i\, D^0_{z_1 z_2}\, U_{z_2 z_3 z_4 z_5}\, d_{z_5}(x)\, d_{z_4}(x)\, d_{z_3}(x) \,. \tag{3.49}$$

4. Zweiteilchensektor

Zur Untersuchung von Norm und Eigenwert eines Zweiteilchenbindungszustands führen wir eine Transformation der Operatoren j_I und ∂_I bezüglich der "Hilfsfeldindizes" i=1,2 durch. Dies zieht eine entsprechende Transformation der Links- und Rechtslösungen σ und φ nach sich <30>.
Unser Ziel ist, die Hilfsfeldindizes, die erforderlich waren, um aus der nichtrenormierbaren Feldgleichung erster Ordnung ein renormierbares Gleichungssystem abzuleiten beziehungsweise die Feldgleichung zweiter Ordnung in ein Gleichungssystem erster Ordnung zu zerlegen, wieder zu eliminieren.
Wir entwickeln die transformierten Funktionen nach Lösungen der freien Diracgleichung und führen die weiteren Rechnungen im Schwerpunktsystem durch. Die Entkopplung des Gleichungssystems führt zu einem geschlossenen Gleichungssystem für drei antisymmetrische Funktionen und gestattet dessen Auflösung, so daß wir im Zweiteilchensektor eine Gleichung dritter Ordnung für die Rechts- und Linkslösung erhalten.
Diese Rechnungen wurden unabhängig von HORNUNG<54> für die Rechtslösung des $T\bar{T}$-Sektors und von LAUXMANN <55> für die Rechts- und Linkslösung des Dreiteilchensektors durchgeführt.
Nach Vernachlässigung von richtungs- und spinabhängigen Termen, welche im wesentlichen ein Verhalten proportional $\frac{1}{m}$ zeigen, sind $\hat{\sigma}_3$ und $\hat{\varphi}_1$ Links- beziehungsweise Rechtslösungen eines hermiteschen Integraloperators. Mit $\hat{\sigma}_3=\hat{\varphi}_1^*$ finden wir als wichtiges Ergebnis, daß zum Beispiel der Zustand TT eine positive Norm besitzt, und die Anpassung der (endlichen!) Kopplungskonstante ermöglicht beobachtbare Werte für die Masse.

4.1 Diagonalanteil der Eigenwertgleichung

Die beiden Eigenwertgleichungen (3.41) für den Funktionalzustand $|F(j,a)\rangle$ und (3.49) für den Funktionalzustand $\langle S^F(\partial,a)|$ sind die entscheidenden Gleichungen für den Fortgang dieser Arbeit.
Zunächst definieren wir

$$K_{I_1 I_2} = K_{Z_1 Z_2}(x_1, x_2)$$

$$:= i D^{\circ}_{Z_1 Z} \left(D^{k}_{Z Z_2} \frac{\partial}{\partial x_1^k} - M_{Z Z_2} \right) \delta(x_1 - x_2) \qquad (4.1)$$

und

$$V_{I_1 I_2 I_3 I_4} = V_{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$:= i D^{\circ}_{Z_1 Z} U_{Z Z_2 Z_3 Z_4} \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4) . \qquad (4.2)$$

Mit diesen Definitionen lauten die Eigenwertgleichungen (3.41) und (3.49) in einer sehr kompakten und übersichtlichen Form

$$E \; |F(j,a)\rangle$$

$$= \sum_{I_1 I_2} j_{I_1} K_{I_1 I_2} \partial_{I_2} \; |F(j,a)\rangle$$

$$+ \sum_{I_1 \cdots I_4} j_{I_1} V_{I_1 I_2 I_3 I_4} \partial_{I_4} \partial_{I_3} \partial_{I_2} \; |F(j,a)\rangle \qquad (4.3)$$

und

$$\langle S^F(\vartheta,\alpha)\,|\,E$$

$$= \langle S^F(\vartheta,\alpha)\,|\sum_{I_1 I_2} j_{I_1} K_{I_1 I_2}\,\vartheta_{I_2}$$

$$+ \langle S^F(\vartheta,\alpha)\,|\sum_{I_1 \cdots I_4} j_{I_1} V_{I_1 I_2 I_3 I_4}\, d_{I_4} d_{I_3} d_{I_2} \quad . \qquad (4.4)$$

Ausmultiplizieren von $d_{I_4} d_{I_3} d_{I_2}$ und Normalordnung der Operatoren j_I und ϑ_I ergibt

$$d_{I_4}\, d_{I_3}\, d_{I_2} = -\sum_{\kappa\kappa'\kappa''} F_{I_4\kappa} F_{I_3\kappa'} F_{I_2\kappa''}\; j_\kappa\, j_{\kappa'}\, j_{\kappa''} \qquad (1)$$

$$+ \sum_{\kappa\kappa'} F_{I_4\kappa} F_{I_3\kappa'}\; j_\kappa\, j_{\kappa'}\, \vartheta_{I_2} \qquad (2)$$

$$+ \sum_{\kappa\kappa'} F_{I_3\kappa} F_{I_2\kappa'}\; j_\kappa\, j_{\kappa'}\, \vartheta_{I_4} \qquad (3)$$

$$+ \sum_{\kappa\kappa'} F_{I_2\kappa} F_{I_4\kappa'}\; j_\kappa\, j_{\kappa'}\, \vartheta_{I_3} \qquad (4)$$

$$- \sum_{\kappa} F_{I_4\kappa}\; j_\kappa\, \vartheta_{I_3}\, \vartheta_{I_2} \qquad (5)$$

$$- \sum_{\kappa} F_{I_3\kappa}\; j_\kappa\, \vartheta_{I_2}\, \vartheta_{I_4} \qquad (6)$$

$$- \sum_{\kappa} F_{I_2\kappa}\; j_\kappa\, \vartheta_{I_4}\, \vartheta_{I_3} \qquad (7)$$

$$+ \vartheta_{I_4}\, \vartheta_{I_3}\, \vartheta_{I_2} \quad . \qquad (8) \qquad (4.5)$$

Normalordnung bewirkt, daß das Produkt $d_{I_4} d_{I_3} d_{I_2}$ in der Form (4.5) keine Anteile mit $F_{ZZ'}(0)$ enthält Die Einführung der Normalordnung an dieser Stelle erscheint etwas unvermittelt, und man kann sie -an dieser Stelle- vermeiden, wenn man bereits bei der der Theorie zugrundeliegenden Feldgleichung in der Wechselwirkung von normalgeordneten Feldoperatoren ausgeht. Dabei wird das Normalprodukt über die Zweipunktfunktion F definiert (vgl. Abschnitt 3.3), und nach Ausmultiplizieren von $d_{I_4} d_{I_3} d_{I_2}$ heben sich die Anteile mit F(0) weg.

Multiplizieren wir (4.3) von links mit

$$i^{-n} \langle 0 | \partial_{K_n} \cdots \partial_{K_1} \quad ,$$

so sind die Terme (1) bis (4) in (4.5) verantwortlich für die Kopplung der Funktion $\varphi(n|a) \equiv \varphi(I_1, \ldots I_n|a)$ an $\varphi(n-4|a)$ und $\varphi(n-2|a)$, und Term (8) führt zur Kopplung an die Funktion $\varphi(n+2|a)$. Bei der Berechnung der Linkslösung (4.4) führen diese Terme zu einer entsprechenden Kopplung der Funktionen $\sigma^F(n|a)$.
Wir definieren einen n-Teilchenzustand durch

$$|F_n(j,a)\rangle := \frac{i^n}{n!} \sum_{I_1 \cdots I_n} \varphi(I_1, \ldots, I_n|a)\, j_{I_1} \cdots j_{I_n} |0\rangle \qquad (4.6)$$

und entsprechend den dualen Funktionalzustand

$$\langle S_n^F(\partial,a)| := (-i)^n \sum_{I_1 \cdots I_n} \sigma^F(I_1, \ldots, I_n|a)\, \langle 0|\partial_{I_n} \cdots \partial_{I_1} . \qquad (4.7)$$

Ein so definierter n-Teilchenzustand enthält die aus Fermionen-Antifermionen-Paaren gebildete Polarisationswolke nicht, und in diesem Fall liefern gerade die Kopplungsterme aus (4.5) keine Beiträge. Wir können deshalb $d_{I_4} d_{I_3} d_{I_2}$ durch

$$-\sum_k F_{I_4 k}\, j_k\, \partial_{I_3}\partial_{I_2} - \sum_k F_{I_3 k}\, j_k\, \partial_{I_2}\partial_{I_4}$$

$$-\sum_k F_{I_2 k}\, j_k\, \partial_{I_4}\partial_{I_3} \qquad (4.8)$$

ersetzen, und erhalten die Eigenwertgleichung

$$E\,|F_n(j,a)\rangle$$

$$= \sum_{I_1 I_2} j_{I_1}\, K_{I_1 I_2}\, \partial_{I_2}\, |F_n(j,a)\rangle$$

$$+ \sum_{I I_1 \cdots I_4} j_{I_1}\, \hat{V}_{I_1 I_2 I_3 I_4}\, F_{I_2 I}\, j_I\, \partial_{I_3}\partial_{I_4}\, |F_n(j,a)\rangle\,. \qquad (4.9)$$

$\langle S_n^F(\partial,a)|$ ist eine Linkslösung dieser Gleichung.
Hierbei haben wir eine Umbenennung von Summationsindizes durchgeführt, und es ist

$$\hat{V}_{I_1 I_2 I_3 I_4} := V_{I_1 I_2 I_3 I_4} - V_{I_1 I_3 I_2 I_4} - V_{I_1 I_4 I_3 I_2}\,. \qquad (4.10)$$

Gleichung (4.9) bezeichnen wir als "n-Teilchen-Gleichung" oder als "Diagonalanteil der Eigenwertgleichung", sie kann als definierende Gleichung für einen relativistischen Clusterzustand betrachtet werden <31>.

4.2 Transformation der Operatoren j_I und ∂_I

Zugunsten einer klaren und überschaubaren Darstellung befassen wir uns in den Abschnitten 4.2 bis 4.5 ausschließlich mit der Rechtslösung von Gleichung (4.9). Die analogen Rechnungen für die Linkslösung führen wir in 4.6 durch.

Um die sogenannten Hilfsfeldindizes i=1,2 zu eliminieren und das aus (4.9) resultierende Gleichungssystem aufzulösen, wurde von STUMPF die nachstehende Transformation der Operatoren j_I und ∂_I angewendet:

$$j^{s}_{A\Lambda\alpha}(x) := 2^{-1/2}\left(j_{A1\Lambda\alpha}(x) + j_{A2\Lambda\alpha}(x)\right) ,$$

$$j^{x}_{A\Lambda\alpha}(x) := 2^{-1/2}\left(j_{A1\Lambda\alpha}(x) - j_{A2\Lambda\alpha}(x)\right)$$

und entsprechend

$$\partial^{s}_{A\Lambda\alpha}(x) := 2^{-1/2}\left(\partial_{A1\Lambda\alpha}(x) + \partial_{A2\Lambda\alpha}(x)\right) ,$$

$$\partial^{x}_{A\Lambda\alpha}(x) := 2^{-1/2}\left(\partial_{A1\Lambda\alpha}(x) - \partial_{A2\Lambda\alpha}(x)\right) . \qquad (4.11)$$

Da wir weiterhin die einheitliche, kompakte Notation beibehalten wollen, dehnen wir diese Transformation auf das gesamte Indexsystem I aus und definieren

$$j'_I := U_{IK}\, j_K \qquad (4.12a)$$

und entsprechend

$$\partial'_I := U_{IK}\, \partial_K . \qquad (4.12b)$$

Hierbei ist

$$U_{IK} := \delta_{AB}\, U_{ik}\, \delta_{\Lambda\Gamma}\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta(x-y) \qquad (4.13)$$

mit

$$U_{ik} := 2^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Die Transformationsmatrix U ist symmetrisch und unitär, denn man verifiziert leicht

$$U_{I_1 I_2} = U_{I_2 I_1} \tag{4.14a}$$

und

$$U_{I_1 I} \, U_{I I_2} = \delta_{I_1 I_2} \quad , \tag{4.14b}$$

es gilt also

$$U = {}^t U = U^{-1} \quad .$$

Der Zusammenhang zu (4.11) ist durch

$$j'_{A1\Lambda\alpha}(x) = j^{\rho}_{A\Lambda\alpha}(x) \quad ,$$

$$j'_{A2\Lambda\alpha}(x) = j^{\chi}_{A2\alpha}(x)$$

und

$$\partial'_{A1\Lambda\alpha}(x) = \partial^{\rho}_{A\Lambda\alpha}(x) \quad ,$$

$$\partial'_{A2\Lambda\alpha}(x) = \partial^{\chi}_{A\Lambda\alpha}(x)$$

gegeben.

Da U nach (4.14) involutorisch ist, gilt

$$j_I = U_{IK} \, j'_K$$

und

$$\partial_I = U_{IK} \, \partial'_K \quad , \tag{4.15}$$

und j' und ∂' erfüllen dieselben AVR wie j und ∂:

$$\{j'_I \, , \, \partial'_K\} = \delta_{IK}$$

$$\{j'_I \, , \, j'_K\} = \{\partial'_I \, , \, \partial'_K\} = 0 \qquad (4.16)$$

Für einen Zweiteilchenzustand finden wir dann mit (4.6) und (4.15)

$$|F_2(j,a)\rangle = -\frac{1}{2}\,\varphi(I_1,I_2\;a)\; j_{I_1}\, j_{I_2}\,|0\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\,\varphi(I_1,I_2\;a)\; U_{I_1k_1}\, j'_{k_1}\; U_{I_2k_2}\, j'_{k_2}\,|0\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\,\varphi'(k_1,k_2\;a)\; j'_{k_1}\; j'_{k_2}\,|0\rangle$$

$$=: |F'_2(j',a)\rangle \quad , \qquad (4.17a)$$

und es ist

$$\varphi'(K_1,K_2|a) = \varphi(I_1,I_2|a)\; U_{I_1K_1}\; U_{I_2K_2} \quad . \qquad (4.17b)$$

Aus der Antisymmetrie der Funktion φ folgt sofort die Antisymmetrie von φ' bei der Vertauschung von I_1 und I_2:

$$\varphi'(I_1,I_2|a) = -\varphi'(I_2,I_1|a) \qquad (4.18)$$

Mit den Bezeichnungen von <30> gilt

$$\varphi\left(\overset{s}{\underset{A\Lambda\alpha}{\times}}\;,\;\overset{s}{\underset{A'\Lambda'\alpha'}{\times'}}\right) = \varphi'\left(\underset{A_1\Lambda\alpha}{\times}\;,\;\underset{A'_1\Lambda'\alpha'}{\times'}\,|a\right) \quad ,$$

$$\varphi\left(\overset{s}{\underset{A\Lambda\alpha}{x}}\,,\,\overset{x}{\underset{A'\Lambda'\alpha'}{x'}}\right) = \varphi'\left(\underset{A1\Lambda\alpha}{x}\,,\,\underset{A'2\Lambda'\alpha'}{x'}\,|a\right),$$

$$\varphi\left(\overset{x}{\underset{A\Lambda\alpha}{x}}\,,\,\overset{s}{\underset{A'\Lambda'\alpha'}{x'}}\right) = \varphi'\left(\underset{A2\Lambda\alpha}{x}\,,\,\underset{A'1\Lambda'\alpha'}{x'}\,|a\right),$$

und

$$\varphi\left(\overset{x}{\underset{A\Lambda\alpha}{x}}\,,\,\overset{x}{\underset{A'\Lambda'\alpha'}{x'}}\right) = \varphi'\left(\underset{A2\Lambda\alpha}{x}\,;\,\underset{A'2\Lambda'\alpha'}{x'}\,|a\right). \quad (4.17c)$$

Die wichtigste Funktion hiervon ist $\varphi^{\rho\rho} = \varphi'_{11}$; wegen

$$\varphi'_{11} = \tfrac{1}{2}[\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{22}] \quad (4.19)$$

besteht φ'_{11} gerade aus der Summe aller "Hilfsfeldanteile". Alle übrigen Indizes haben wir hierbei unterdrückt.

Aus (4.9) erhalten wir mit (4.15) die Zweiteilchengleichung

$$E\,|F_2'(j',a)\rangle = j'_{I'_1}\,U_{I'_1I'_4}\,K_{I_1I_2}\,U_{I_2I'_2}\,\partial'_{I'_2}\,|F_2'(j',a)\rangle + j'_{I'_4}\,U_{I'_4I_4}\,\hat{V}_{I_1I_2I_3I_4}\,F_{I_2I}\,j'_{I'}\,U_{I_3I'_3}\,\partial'_{I'_3}\,U_{I_4I'_4}\,\partial'_{I'_4}\,|F_2'(j',a)\rangle. \quad (4.20)$$

Wir setzen $|F_2'(j',a)\rangle$ aus (4.17) ein und unter Verwendung der AVR (4.16) und Gleichung (3.7) finden wir

$$E\ \varphi'(I_1, I_2 | \alpha)\ j'_{I_1}\ j'_{I_2} | 0\rangle$$

$$= 2\ j'_{I'_1}\ U_{I'_1 I_1}\ K_{I_1 I_2}\ U_{I_2 I'_2}\ \varphi'(I'_2, I_3 | \alpha)\ j'_{I_3} | 0\rangle$$

$$+ 2\ j'_{I'_1}\ U_{I'_1 I_1}\ \hat{V}_{I_1 I_2 I_3 I_4}\ F_{I_2 I}\ U_{I I'}\ j'_{I'}\ U_{I_3 I'_3}\ U_{I_4 I'_4}\ \varphi'(I'_4, I'_3 | \alpha) | 0\rangle. \tag{4.21}$$

Hieraus leiten wir im nächsten Abschnitt ein Gleichungssystem für die Funktion φ' ab.

4.3 Projektion

Wir multiplizieren Gleichung (4.21) von links mit

$$\langle 0 | \partial'_{K_2}\ \partial'_{K_1}$$

und wegen (vgl. (4.16) und (3.7))

$$\langle 0 | \partial'_{K_2}\ \partial'_{K_1}\ j'_{I_1}\ j'_{I_2} | 0\rangle = \delta_{I_1 K_1}\ \delta_{I_2 K_2} - \delta_{I_1 K_2}\ \delta_{I_2 K_1} \tag{4.22}$$

erhalten wir als Eigenwertproblem das folgende Gleichungssystem für die Funktionen φ':

$$E\ \varphi'(k_1, k_2 | \alpha)$$

$$= U_{k_1 I_1}\ K_{I_1 I_2}\ U_{I_2 I'_2}\ \varphi'(I'_2, k_2 | \alpha)$$

$$+ U_{K_2 I_1} K_{I_1 I_2} U_{I_2 I_2'} \varphi'(K_1, I_2' | a)$$

$$- U_{K_1 I_1} \hat{V}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F_{I_2 I} U_{I K_2} U_{I_3 I_3'} U_{I_4 I_4'} \varphi'(I_3', I_4' | a)$$

$$+ U_{K_2 I_1} \hat{V}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F_{I_2 I} U_{I K_1} U_{I_3 I_3'} U_{I_4 I_4'} \varphi'(I_3', I_4' | a) \qquad (4.23)$$

K_1 und K_2 sind freie Indizes, während über sämtliche Indizes I, I_i und I_i' summiert wird.
Obwohl $\langle 0 | \partial'_{K_2} \partial'_{K_1}$ kein Projektor im Sinne von $P^2=P$ ist, bezeichnen wir (4.23) als "projizierte Eigenwertgleichung".
Indem wir die freien Indizes K_1 und K_2 spezialisieren, finden wir vier Gleichungen für die vier Funktionen $\varphi^{\rho\rho}$, $\varphi^{\rho\chi}$, $\varphi^{\chi\rho}$ und $\varphi^{\chi\chi}$. Dies ist eine etwas langwierige und mühsame Angelegenheit, die dadurch erleichtert wird, daß wir das Indexsystem gemäß

$$K \equiv B,k,\Gamma,\beta,y \equiv k,b \qquad (4.24)$$

und

$$I \equiv A,i,\Lambda,\alpha,x \equiv i,a$$

aufspalten. Wir setzen also $b \equiv B,\Gamma,\beta,y$ und $a \equiv A,\Lambda,\alpha,x$.

Weiterhin beachten wir, daß der Operator $K_{I_1 I_2}$ (vgl. Definition (4.1) und (2.61)) in den Indizes i_1 und i_2 diagonal ist:

$$K_{I_1 I_2} = K_{i_1 a_1, i_2 a_2} = \delta_{i_1 i_2} \ldots \qquad (4.25)$$

Für den transformierten Operator UKU erhalten wir damit

$$U_{I_1 I} K_{II'} U_{I'I_2} = \begin{cases} K^{+}_{a_1 a_2} & \text{für } i_1 = i_2 \\ K^{-}_{a_1 a_2} & \text{für } i_1 \neq i_2 \end{cases} \qquad (4.26a)$$

mit

$$K^{\pm}_{a_1 a_2} := \tfrac{1}{2}(K_{1a_1,1a_2} \pm K_{2a_1,2a_2}) \quad . \qquad (4.26b)$$

Gemäß Anhang B ist auch die Zweipunktfunktion $F_{I_1 I_2}$ diagonal in den Indizes i_1 und i_2

$$F_{I_1 I_2} = F_{i_1 a_1, i_2 a_2} = \delta_{i_1 i_2} \ldots \quad , \qquad (4.27)$$

und wir definieren ebenfalls Summe und Differenz durch

$$F^{\pm}_{a_1 a_2} := \tfrac{1}{2}(F_{1a_1,1a_2} \pm F_{2a_1,2a_2}) \quad . \qquad (4.28)$$

Wichtig für das Folgende ist, daß $K^{\pm}$ und $F^{\pm}$ nicht mehr von den Indizes i_1 und i_2 abhängen.
Schließlich folgt aus (2.47) und der Definition von $\hat{V}$ (vgl. (2.65), (4.2) und (4.10))

$$\hat{V}_{a_1 I_2 I_3 I_4} = -\hat{V}_{a_1 I_2 I_3 I_4} \quad , \qquad (4.29a)$$

und $\hat{V}$ ist unabhängig von i_2, i_3 und i_4. Aus diesem Grund setzen wir

$$\hat{V}_{a_1 a_2 a_3 a_4} := \hat{V}_{a_1 a_2 a_3 a_4} \quad , \qquad (4.29b)$$

und es gilt

$$U_{k_1 I_1}\,\hat{V}_{I_1 I_2 I_3 I_4}\,F_{I_2 I}\,U_{I k_2} = \begin{cases} 0 & \text{für } k_1 = 1 \\ 2\,\hat{V}_{b_1 a_2 a_3 a_4}\,F^{+}_{a_2 b_2} & \text{für } k_1 = 2,\ k_2 = 1 \\ 2\,\hat{V}_{b_1 a_2 a_3 a_4}\,F^{-}_{a_2 b_2} & \text{für } k_1 = 2,\ k_2 = 2 \end{cases} \tag{4.29c}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir ohne größere Schwierigkeiten die vier gesuchten Gleichungen angeben. Um die Hilfsfeldindizes k_1 und k_2 hervorzuheben, verwenden wir die Bezeichnungen von (4.17c).

$(k_1, k_2) = (1,1)$:

$$E\,\varphi(\overset{s}{b_1}, \overset{s}{b_2}) = K^{+}_{b_1 a}\,\varphi(\overset{s}{a}, \overset{s}{b_2}) + K^{+}_{b_2 a}\,\varphi(\overset{s}{b_1}, \overset{s}{a}) + K^{-}_{b_1 a}\,\varphi(\overset{x}{a}, \overset{s}{b_2}) + K^{-}_{b_2 a}\,\varphi(\overset{s}{b_1}, \overset{x}{a}) \tag{4.30a}$$

Wegen (4.29) enthält diese Gleichung keinen Wechselwirkungsanteil.

$(k_1, k_2) = (1,2)$:

$$E\,\varphi(\overset{s}{b_1}, \overset{x}{b_2}) = K^{+}_{b_1 a}\,\varphi(\overset{s}{a}, \overset{x}{b_2}) + K^{+}_{b_2 a}\,\varphi(\overset{s}{b_1}, \overset{x}{a})$$

$$+ K^{-}_{b_1 a}\ \varphi(\overset{x}{a}_1, \overset{x}{b}_2) + K^{-}_{b_2 a}\ \varphi(\overset{s}{b}_1, \overset{s}{a})$$

$$+ 4\ \hat{V}_{b_2 a_2 a_3 a_4}\ F^{+}_{a_2 b_1}\ \varphi(\overset{s}{a}_3, \overset{s}{a}_4) \qquad (4.30b)$$

$(k_1, k_2) = (2,1)$:

$$E\ \varphi(\overset{x}{b}_1, \overset{s}{b}_2)$$

$$= K^{+}_{b_1 a}\ \varphi(\overset{x}{a}_1, \overset{s}{b}_2) + K^{+}_{b_2 a}\ \varphi(\overset{x}{b}_1, \overset{s}{a})$$

$$+ K^{-}_{b_1 a}\ \varphi(\overset{s}{a}, \overset{s}{b}_2) + K^{-}_{b_2 a}\ \varphi(\overset{x}{b}_1, \overset{x}{a})$$

$$- 4\ \hat{V}_{b_1 a_2 a_3 a_4}\ F^{+}_{a_2 b_2}\ \varphi(\overset{s}{a}_3, \overset{s}{a}_4) \qquad (4.30c)$$

$(k_1, k_2) = (2,2)$:

$$E\ \varphi(\overset{x}{b}_1, \overset{x}{b}_2)$$

$$= K^{+}_{b_1 a}\ \varphi(\overset{x}{a}, \overset{x}{b}_2) + K^{+}_{b_2 a}\ \varphi(\overset{x}{b}_1, \overset{x}{a})$$

$$+ K^{-}_{b_1 a}\ \varphi(\overset{s}{a}, \overset{x}{b}_2) + K^{-}_{b_2 a}\ \varphi(\overset{x}{b}_1, \overset{s}{a})$$

$$- 4\,\hat{V}_{b_1 a_2 a_3 a_4}\; F^{-}_{a_2 b_2}\; \varphi\left(\overset{s}{a_3},\overset{s}{a_4}\right)$$

$$+ 4\,\hat{V}_{b_2 a_2 a_3 a_4}\; F^{-}_{a_2 b_1}\; \varphi\left(\overset{s}{a_3},\overset{s}{a_4}\right) \qquad (4.30d)$$

Während die Funktionen $\varphi(\overset{\rho}{b_1},\overset{\rho}{b_2})$ und $\varphi(\overset{\chi}{b_1},\overset{\chi}{b_2})$ bei Vertauschung von b_1 und b_2 antisymmetrisch sind, gilt

$$\varphi(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) = -\varphi(\overset{\chi}{b_2},\overset{\rho}{b_1}) \; . \qquad (4.31)$$

Wir zerlegen deshalb $\varphi^{\rho\chi}$ in den antisymmetrischen Anteil

$$\varphi_a(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) = \tfrac{1}{2}(\varphi(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) - \varphi(\overset{\rho}{b_2},\overset{\chi}{b_1})) \qquad (4.32a)$$

und in den symmetrischen Anteil

$$\varphi_s(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) = \tfrac{1}{2}(\varphi(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) + \varphi(\overset{\rho}{b_2},\overset{\chi}{b_1})) \; , \qquad (4.32b)$$

so daß

$$\varphi(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) = \varphi_a(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) + \varphi_s(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) \qquad (4.32c)$$

und

$$\varphi(\overset{\chi}{b_1},\overset{\rho}{b_2}) = -\varphi(\overset{\rho}{b_2},\overset{\chi}{b_1})$$

$$= \varphi_a(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) - \varphi_s(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) \; . \qquad (4.32d)$$

Wir gehen zu den bequemeren Bezeichnungen

$$\varphi_1 := \varphi^{\rho\rho} \; , \quad \varphi_2 := \varphi^{\rho\chi}_a \; , \quad \varphi_3 := \varphi^{\chi\chi} \; , \quad \varphi_4 := \varphi^{\rho\chi}_s \qquad (4.33)$$

über und definieren symmetrische beziehungsweise antisymmetrische Operatoren mittels

$$Z_{a_1a_2,b_1b_2} := E\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2} - K^+_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2} - \delta_{a_1b_1}K^+_{a_2b_2} \qquad (4.34a)$$

und

$$M^-_{a_1a_2,b_1b_2} := K^-_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2} \pm \delta_{a_1b_1}K^-_{a_2b_2} \quad . \qquad (4.35a)$$

Wie man sofort sieht, haben diese Operatoren die Eigenschaft

$$Z_{a_1a_2,b_1b_2} = Z_{a_2a_1,b_2b_1} \qquad (4.34b)$$

und

$$M^\pm_{a_1a_2,b_1b_2} = \pm M^\pm_{a_2a_1,b_2b_1} \quad , \qquad (4.35b)$$

das heißt, bei der gleichzeitigen Vertauschung von

$$a_1 \longleftrightarrow a_2 \qquad \text{und} \qquad b_1 \longleftrightarrow b_2$$

sind $Z_{a_1a_2,b_1b_2}$ und $M^+_{a_1a_2,b_1b_2}$ symmetrisch, $M^-_{a_1a_2,b_1b_2}$ ist antisymmetrisch.
Gleichung (4.30a) lautet dann nach Umbenennung von a und b

$$Z_{a_1a_2,b_1b_2}\ \varphi_1(b_1,b_2) - M^+_{a_1a_2,b_1b_2}\ \varphi_2(b_1,b_2) + M^-_{a_1a_2,b_1b_2}\ \varphi_4(b_1,b_2) = 0 \quad . \qquad (4.36a)$$

Um die beiden Gleichungen (4.30b) und (4.30c) zu untersuchen, ist es zweckmäßig deren Summe und Differenz zu betrachten. Auch hier benennen wir darüber hinaus die Indizes um, und unter Verwendung der Antisymmetrie von φ_1 erhalten wir

$$2\, Z_{a_1 a_2, b_1 b_2}\ \varphi_2(b_1, b_2)$$

$$- M^{+}_{a_1 a_2, b_1 b_2}\ [\varphi_1(b_1, b_2) + \varphi_3(b_1, b_2)]$$

$$+ 4\left(\hat{V}_{a_1 b b_1 b_2}\ F^{+}_{b a_2} + \hat{V}_{a_2 b b_2 b_1}\ F^{+}_{b a_1}\right) \varphi_1(b_1, b_2) = 0 \qquad (4.36b)$$

und

$$2\, Z_{a_1 a_2, b_1 b_2}\ \varphi_4(b_1, b_2)$$

$$+ M^{-}_{a_1 a_2, b_1 b_2}\ [\varphi_1(b_1, b_2) - \varphi_3(b_1, b_2)]$$

$$- 4\left(\hat{V}_{a_1 b b_1 b_2}\ F^{+}_{b a_2} - \hat{V}_{a_2 b b_2 b_1}\ F^{+}_{b a_1}\right) \varphi_1(b_1, b_2) = 0. \qquad (4.36d)$$

Der Wechselwirkungsanteil in (4.36b) ist im Sinne von (4.34b) beziehungsweise (4.35b) symmetrisch, der entsprechende Term in (4.36d) ist antisymmetrisch.
Die letzte Gleichung schließlich hat wieder einen symmetrischen Wechselwirkungsanteil und lautet

$$Z_{a_1 a_2, b_1 b_2}\ \varphi_3(b_1, b_2)$$

$$- M^{+}_{a_1 a_2, b_1 b_2}\ \varphi_2(b_1, b_2)$$

$$- M^{-}_{a_1 a_2, b_1 b_2}\ \varphi_4(b_1, b_2)$$

$$+ 4\left(\hat{V}_{a_1 b b_1 b_2}\ F^{-}_{b a_2} + \hat{V}_{a_2 b b_2 b_1}\ F^{-}_{b a_1}\right) \varphi_1(b_1, b_2) = 0. \qquad (4.36c)$$

Für die Operatoren verwenden wir die Abkürzungen

$$\mathcal{Y} \equiv Z_{a_1 a_2, b_1 b_2} ,$$

$$\mathcal{M}^{\pm} \equiv M^{\pm}_{a_1 a_2, b_1 b_2} ,$$

$$\mathcal{W}^{\pm} \equiv \hat{V}_{a_1 b b_1 b_2} F^{+}_{b a_2} \pm \hat{V}_{a_2 b b_2 b_1} F^{+}_{b a_1}$$

und

$$\mathcal{W}^{\pm} \equiv \hat{V}_{a_1 b b_1 b_2} F^{-}_{b a_2} \pm \hat{V}_{a_2 b b_2 b_1} F^{-}_{b a_1} \qquad (4.37a)$$

und können damit die vier Gleichungen (4.36a-d) symbolisch als Matrixgleichung schreiben:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y} & -\mathcal{M}^{+} & 0 & \mathcal{M}^{-} \\ 4\mathcal{W}^{+} - \mathcal{M}^{+} & 2\mathcal{Y} & -\mathcal{M}^{+} & 0 \\ 4\mathcal{W}^{+} & -\mathcal{M}^{+} & \mathcal{Y} & -\mathcal{M}^{-} \\ -4\mathcal{W}^{-} + \mathcal{M}^{-} & 0 & -\mathcal{M}^{-} & 2\mathcal{Y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = 0 \qquad (4.37b)$$

In den ersten drei Gleichungen treffen stets symmetrische Operatoren auf antisymmetrische Funktionen und der antisymmetrische Operator $\mathcal{M}^{-}$ auf die symmetrische Funktion φ_4. In hierzu konsistenter Weise wirken in der vierten Gleichung antisymmetrische Operatoren auf die antisymmetrischen Funktionen φ_1 und φ_3 und der symmetrische Operator $2\mathcal{Y}$ auf die symmetrische Funktion φ_4.
Infolge des Übergangs zu Summen und Differenzen sind alle hier auftretenden Operatoren nicht mehr (explizit) von den Hilfsfeldindizes abhängig, und der Hilfsfeldformalismus ist nur noch in den vier Funktionen φ_i (i=1,2,3,4) enthalten.

Wir wollen das Gleichungssystem (4.37b) in eine Form bringen, in der die antisymmetrischen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ von der symmetrischen Funktion φ_4 entkoppeln und $\mathcal{H}^+$ invertierbar ist. In diesem Fall können wir (4.37) nach φ_1 auflösen, und wir entfernen uns damit endgültig vom Hilfsfeldformalismus. Zu diesem Zweck entwickeln wir im nächsten Abschnitt die Funktionen φ_i nach Lösungen der freien Diracgleichung.

4.4 TT-Zustand. Entwicklung nach Diracspinoren

Wir schreiben sämtliche Indizes $a \equiv A, \Lambda, \alpha, x$ und $b \equiv B, \Gamma, \beta, y$ aus und untersuchen die Wirkung der Operatoren $\mathcal{Y}$, $\mathcal{H}^\pm$ und $\mathcal{W}^\pm$, $\mathcal{W}^\pm$ auf die Funktionen φ_i $(i=1,2,3,4)$.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
& Z_{a_1 a_2 b_1 b_2}\ \varphi_i(b_1, b_2) \\
&= \Big\{ E\ \delta_{\Lambda_1 \alpha_1 \Gamma_1 \beta_1}\ \delta_{\Lambda_2 \alpha_2 \Gamma_2 \beta_2} \\
&\quad + \Gamma^0_{\Lambda_1 \alpha_1 \Lambda \alpha} \Big(i\, \Gamma^m_{\Lambda \alpha \Gamma_1 \beta_1} \frac{\partial}{\partial x_1^m} - m^+_{A_1}\, \delta_{\Lambda \alpha \Gamma_1 \beta_1} \Big)\, \delta_{\Lambda_2 \alpha_2 \Gamma_2 \beta_2} \\
&\quad + \delta_{\Lambda_1 \alpha_1 \Gamma_1 \beta_1}\, \Gamma^0_{\Lambda_2 \alpha_2 \Lambda \alpha} \Big(i\, \Gamma^m_{\Lambda \alpha \Gamma_2 \beta_2} \frac{\partial}{\partial x_2^m} - m^+_{A_2}\, \delta_{\Lambda \alpha \Gamma_2 \beta_2} \Big) \Big\} \\
&\quad \cdot \varphi_i \Big(\underset{A_1 \Gamma_1 \beta_1}{x_1}\ ,\ \underset{A_2 \Gamma_2 \beta_2}{x_2} \Big)\ ,
\end{aligned}
\tag{4.38a}
$$

wobei wir die Definitionen

$$m_A^+ := \frac{1}{2}(m_{A1} + m_{A2}) \tag{4.38b}$$

und

$$\delta_{\Lambda\alpha,\Gamma\beta} := \delta_{\Lambda\Gamma}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{4.38c}$$

eingeführt haben.

Ganz analog erhalten wir

$$M^{\pm}_{a_1 a_2, b_1 b_2}\ \varphi_i(b_1, b_2)$$

$$= \left\{ m_{A_1}^- \Gamma^\circ_{\Lambda_1\alpha_1,\Gamma_1\beta_1}\ \delta_{\Lambda_2\alpha_2,\Gamma_2\beta_2} \pm m_{A_2}^-\ \delta_{\Lambda_1\alpha_1,\Gamma_1\beta_1}\ \Gamma^\circ_{\Lambda_2\alpha_2,\Gamma_2\beta_2} \right\}$$

$$\cdot\ \varphi_i\left(\underset{A_1\Gamma_1\beta_1}{x_1}\ ,\ \underset{A_2\Gamma_2\beta_2}{x_2}\right) \tag{4.39a}$$

mit (vgl. (2.47))

$$m_A^- := \frac{1}{2}(m_{A1} - m_{A2}) = \Delta m_{A1}\ . \tag{4.39b}$$

Anwendung der Wechselwirkungsterme ergibt

$$\hat{V}_{a_1 b\, b_1 b_2}\ F^{\pm}_{b a_2}\ \varphi_i(b_1, b_2)$$

$$= \hat{V}_{\substack{A_1\ B\ B_1\ B_2\\ \Lambda_1\ \Gamma\ \Gamma_1\ \Gamma_2\\ \alpha_1\ \beta\ \beta_1\ \beta_2}}\ F^{\pm}\left(\underset{B\Gamma\beta}{x_1}\ ,\ \underset{A_2\Lambda_2\alpha_2}{x_2}\right)\ \varphi_i\left(\underset{B_1\Gamma_1\beta_1}{x_1}\ ,\ \underset{B_2\Gamma_2\beta_2}{x_1}\right) \tag{4.40a}$$

und

$$\hat{V}_{a_2 b b_2 b_1} \; F^{\pm}_{b a_1} \; \varphi_i(b_1, b_2)$$

$$= \hat{V}_{\substack{A_2 \; B \; B_2 \; B_1 \\ \Lambda_2 \; \Gamma \; \Gamma_2 \; \Gamma_1 \\ \alpha_2 \; \beta \; \beta_2 \; \beta_1}} \; F^{\pm}_{B\Gamma\beta}(x_2, x_1)_{A_1\Lambda_1\alpha_1} \; \varphi_i(x_2, x_2)_{B_1\Gamma_1\beta_1, B_2\Gamma_2\beta_2} \; . \tag{4.40b}$$

Mit den Formeln (4.38) - (4.40) ist es leicht, das Gleichungssystem (4.37) mit sämtlichen Indizes aufzuschreiben. Da dies nur Schreibarbeit ist, wollen wir an dieser Stelle darauf verzichten, und untersuchen als Anwendungsbeispiel das Gleichungssystem für den Zustand TT.
Hierzu setzen wir $A_1=A_2=1$ und $\Lambda_1=\Lambda_2=1$. In diesem einfachsten Fall enthält das Gleichungssystem ausschließlich die Funktionen

$$\varphi_i(x_{11\alpha_1}, x_{11\alpha_2}) \qquad (i=1,2,3,4) \; ,$$

und deshalb vereinbaren wir für den Rest dieser Arbeit, daß wir die Isospinindizes $A_1=A_2=1$ und die Superspinorindizes $\Lambda_1=\Lambda_2=1$ unterdrücken und einfach

$$\varphi_i(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})$$

schreiben.
Die Struktur des Gleichungssystems (4.37) bleibt natürlich erhalten, wir müssen nur die Operatoren $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{K}^{\pm}$ durch

$$Z_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}(x_1, x_2)$$

$$:= E \, \delta_{\alpha_1\beta_1} \, \delta_{\alpha_2\beta_2}$$

$$+ \gamma^0_{\alpha_1\alpha} \left(i \gamma^m_{\alpha\beta_1} \frac{\partial}{\partial x_1^m} - m_1^+ \delta_{\alpha\beta_1} \right) \delta_{\alpha_2\beta_2}$$

$$+ \delta_{\alpha_1\beta_1} \gamma^{\circ}_{\alpha_1\alpha} \left(i \gamma^{m}_{\alpha\beta_2} \frac{\partial}{\partial x_2^m} - m_1^{+} \delta_{\alpha\beta_2} \right) \qquad (4.41)$$

und

$$M^{\pm}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} := m_1^{-} \left\{ \gamma^{\circ}_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\alpha_2\beta_2} \pm \delta_{\alpha_1\beta_1} \gamma^{\circ}_{\alpha_2\beta_2} \right\} \qquad (4.42)$$

ersetzen und - etwas mühsamer - den Wechselwirkungsterm auswerten. Das Gleichungssystem für den Zustand TT lautet dann

$$\begin{aligned} & Z_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}(x_1,x_2) \quad \varphi_1\left(\underset{\beta_1}{x_1}, \underset{\beta_2}{x_2}\right) \\ & - M^{+}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} \quad \varphi_2\left(\underset{\beta_1}{x_1}, \underset{\beta_2}{x_2}\right) \\ & + M^{-}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} \quad \varphi_4\left(\underset{\beta_1}{x_1}, \underset{\beta_2}{x_2}\right) = 0 \quad , \end{aligned} \qquad (4.43a)$$

$$\begin{aligned} & 2\, Z_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}(x_1,x_2) \quad \varphi_2\left(\underset{\beta_1}{x_1}, \underset{\beta_2}{x_2}\right) \\ & - M^{+}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} \quad \left\{ \varphi_1\left(\underset{\beta_1}{x_1}, \underset{\beta_2}{x_2}\right) + \varphi_3\left(\underset{\beta_1}{x_1}, \underset{\beta_2}{x_2}\right) \right\} \\ & + \frac{4g}{m_1^{-}} \gamma^{\circ}_{\alpha_1\beta_1} \gamma^{\circ}_{\beta_1\beta} \quad F^{+}\left(\underset{12\beta}{x_1}, \underset{11\alpha_2}{x_2}\right) \varphi_1\left(\underset{\beta_1}{x_1}, \underset{\beta_2}{x_1}\right) \\ & + \frac{4g}{m_1^{-}} \gamma^{\circ}_{\alpha_2\beta_2} \gamma^{\circ}_{\beta_1\beta} \quad F^{+}\left(\underset{12\beta}{x_2}, \underset{11\alpha_1}{x_1}\right) \varphi_1\left(\underset{\beta_1}{x_2}, \underset{\beta_2}{x_2}\right) = 0 \quad , \end{aligned} \qquad (4.43b)$$

$$
\begin{aligned}
& Z_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}(x_1,x_2)\ \varphi_3\left(\begin{matrix}x_1\\ \beta_1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ \beta_2\end{matrix}\right) \\
& - M^{+}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}\ \varphi_2\left(\begin{matrix}x_1\\ \beta_1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ \beta_2\end{matrix}\right) \\
& - M^{-}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}\ \varphi_4\left(\begin{matrix}x_1\\ \beta_1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ \beta_2\end{matrix}\right) \\
& + \frac{4g}{m_1^-}\ \gamma^0_{\alpha_1\beta_1}\ \gamma^0_{\beta_2\beta}\ F^-\left(\begin{matrix}x_1\\ 12\beta\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ 11\alpha_2\end{matrix}\right)\ \varphi_1\left(\begin{matrix}x_1\\ \beta_1\end{matrix},\begin{matrix}x_1\\ \beta_2\end{matrix}\right) \\
& + \frac{4g}{m_1^-}\ \gamma^0_{\alpha_2\beta_2}\ \gamma^0_{\beta_1\beta}\ F^-\left(\begin{matrix}x_2\\ 12\beta\end{matrix},\begin{matrix}x_1\\ 11\alpha_1\end{matrix}\right)\ \varphi_1\left(\begin{matrix}x_2\\ \beta_1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ \beta_2\end{matrix}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{4.43c}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& 2\, Z_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}(x_1,x_2)\ \varphi_4\left(\begin{matrix}x_1\\ \beta_1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ \beta_2\end{matrix}\right) \\
& + M^{-}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}\ \left\{\varphi_1\left(\begin{matrix}x_1\\ \beta_1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ \beta_2\end{matrix}\right) - \varphi_3\left(\begin{matrix}x_1\\ \beta_1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ \beta_2\end{matrix}\right)\right\} \\
& - \frac{4g}{m_1^-}\ \gamma^0_{\alpha_1\beta_1}\ \gamma^0_{\beta_2\beta}\ F^+\left(\begin{matrix}x_1\\ 12\beta\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ 11\alpha_2\end{matrix}\right)\ \varphi_1\left(\begin{matrix}x_1\\ \beta_1\end{matrix},\begin{matrix}x_1\\ \beta_2\end{matrix}\right) \\
& + \frac{4g}{m_1^-}\ \gamma^0_{\alpha_2\beta_2}\ \gamma^0_{\beta_1\beta}\ F^+\left(\begin{matrix}x_2\\ 12\beta\end{matrix},\begin{matrix}x_1\\ 11\alpha_1\end{matrix}\right)\ \varphi_1\left(\begin{matrix}x_2\\ \beta_1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ \beta_2\end{matrix}\right) = 0\ .
\end{aligned}
\tag{4.43d}
$$

Zur Ableitung dieser Gleichungen haben wir ausgenützt, daß die Zweipunktfunktion

$$F^{\pm}\left(\begin{matrix}x\\ A\Lambda\alpha\end{matrix},\begin{matrix}x'\\ A'\Lambda'\alpha'\end{matrix}\right)$$

in den Indizes A,A' diagonal und in den Indizes Λ,Λ' antidiagonal ist (siehe Anhang B). Es ist diese Eigenschaft der Zwei-

punktfunktion, die weitere Beiträge des Wechselwirkungsterms unterdrückt. Da das Gleichungssystem (4.43) keine Ableitungen nach der Zeit enthält, gehen wir zu gleichen Zeiten $x_1^0 = x_2^0 = 0$ über. Hierbei ist zu beachten, daß die Zweipunktfunktionen $F^{\pm}$ unstetig sind. Wir führen deshalb den Übergang zu gleichen Zeiten im Einklang mit der bisher dargestellten Theorie so durch, daß die Antisymmetrie in den restlichen Indizes und Variablen erhalten bleibt. Für die Einzelheiten verweisen wir auf den Anhang B.
Diesen Übergang zur "einzeitigen Theorie" hätten wir übrigens bereits nach Elimination der Zeitableitung und Projektion der Funktionalgleichung durchführen können. Daß wir dies erst an dieser Stelle tun, hat ausschließlich technische Gründe: zugunsten einer übersichtlichen Notation wollten wir das Indexsystem nicht noch weiter aufspalten.

Die Operatoren $M^{\pm}$ (4.42) sind als Summe beziehungsweise als Differenz von Kroneckerprodukten in dieser Form nicht invertierbar. Zur weiteren Auswertung der Gleichungen (4.43) entwickeln wir deshalb die Funktionen

$$\varphi_i(\underset{\beta_1}{\vec{x}_1}, \underset{\beta_2}{\vec{x}_2}) \equiv \varphi_i(0, \underset{\beta_1}{\vec{x}_1}, 0, \underset{\beta_2}{\vec{x}_2}) \qquad (i=1,..,4)$$

nach Lösungen der freien Diracgleichung zur Masse m_1^+.
Sämtliche Definitionen und Formeln hierfür sind im Anhang A zu finden, wobei die dort verwendete Masse m durch

$$m^+ := m_1^+ \qquad (4.44a)$$

zu ersetzen ist. Entsprechend verwenden wir im folgenden die vereinfachende Bezeichnung

$$m^- := m_1^- \quad . \qquad (4.44b)$$

Wir machen den Ansatz

$$\varphi_i\left(\underset{\rho_1}{\vec{x}_1}, \underset{\rho_2}{\vec{x}_2}\right) = \sum_{s_1', s_2'=1}^{2} \int \tilde{\varphi}_i(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2')\, u_{\rho_1}(\vec{k}_1 s_1')\, u_{\rho_2}(\vec{k}_2 s_2')\, e^{i\vec{k}_1\vec{x}_1}\, e^{i\vec{k}_2\vec{x}_2}\, d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2 \,. \tag{4.45a}$$

Die Indizes s_1' und s_2' sind Spinindizes und nehmen die Werte 1 und 2 an. Diese Entwicklung ist exakt, wenn für den in den Funktionen φ_i enthaltenen Vakuumzustand das nackte Vakuum angenommen wird.
Die Funktionen φ_i sind durch

$$\tilde{\varphi}_i(\vec{k}_1 s_1, \vec{k}_2 s_2) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \varphi_i\left(\underset{\alpha_1}{\vec{x}_1}, \underset{\alpha_2}{\vec{x}_2}\right) u^{+}_{\alpha_1}(\vec{k}_1 s_1)\, u^{+}_{\alpha_2}(\vec{k}_2 s_2)\, e^{-i\vec{k}_1\vec{x}_1}\, e^{-i\vec{k}_2\vec{x}_2}\, d\vec{x}_1\, d\vec{x}_2 \tag{4.45b}$$

gegeben, und aus der Antisymmetrie von φ_i (i=1,2,3) folgt

$$\tilde{\varphi}_i(\vec{k}_1 s_1, \vec{k}_2 s_2) = -\tilde{\varphi}_i(\vec{k}_2 s_2, \vec{k}_1 s_1) \qquad (i=1,2,3) \,, \tag{4.45c}$$

das heißt $\tilde{\varphi}_i$ (i=1,2,3) ist ebenfalls antisymmetrisch bei Vertauschung der Indizes und Variablen. $\tilde{\varphi}_4$ ist dagegen symmetrisch.
Wir setzen die Entwicklung (4.45) und die Formeln für die Zweipunktfunktion aus Anhang B ein und multiplizieren sämtliche Gleichungen mit

$$\frac{1}{(2\pi)^6}\, e^{-i\vec{p}_1\vec{x}_1}\, e^{-i\vec{p}_2\vec{x}_2} \,.$$

Nach Integration über $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ und Multiplikation mit

$$u^{+}_{\alpha_1}(\vec{p}_1 s_1)\; u^{+}_{\alpha_2}(\vec{p}_2 s_2)$$

erhalten wir ein Gleichungssystem für die Funktionen $\tilde{\varphi}_i$.
Eine besonders einfache Gestalt nehmen dabei die "freien

Anteile" der Gleichungen (4.43) an:
der Operator $Z_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}(p_1,p_2)$ geht in

$$Z(\vec{p}_1,\vec{p}_2) := E - E_{\vec{p}_1} - E_{\vec{p}_2} \tag{4.46}$$

über, und anstelle von $M^{\pm}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}$ erhalten wir

$$M^{\pm}(\vec{p}_1,\vec{p}_2) := m^- m^+ \left\{ \frac{1}{E_{\vec{p}_1}} + \frac{1}{E_{\vec{p}_2}} \right\} , \tag{4.47}$$

so daß wir als Ergebnis für die erste Gleichung (4.43a)

$$Z(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\ \tilde{\varphi}_1(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2)$$

$$- M^+(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\ \tilde{\varphi}_2(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2) + M^-(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\ \tilde{\varphi}_4(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2) = 0 \tag{4.48a}$$

erhalten.

Eine kompliziertere Gestalt hat der Wechselwirkungsterm, der in den restlichen Gleichungen auszuwerten ist. So lautet die zweite Gleichung (4.43b) nach Ausführung der oben beschriebenen Entwicklung

$$2\ Z(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\ \tilde{\varphi}_2(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2)$$

$$- M^+(\vec{p}_1,\vec{p}_2) \left\{ \tilde{\varphi}_1(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2) + \tilde{\varphi}_3(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2) \right\}$$

$$- \frac{g}{2(m^-)^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}_2 \left\{ F_1^+(\vec{p}_2 - \vec{k}_2)\ u^+_{\alpha_2}(\vec{p}_2 s_2)\ \gamma^0_{\alpha_2\beta_2}\ \rho_{2,2}\ u_{\beta_2}(\vec{k}_2 s_2') \right.$$

$$+ F_2^+(\vec{p}_2^{\,2})\, u^+_{\alpha_2}(\vec{p}_1 s_2)\, u_{\alpha_2}(\vec{k}_2 s_2')\Big\}\, \bar{u}_{\alpha_1}(\vec{p}_1 s_1)\, u_{\alpha_1}(\vec{k}_1 s_1')$$

$$\cdot\, \tilde{\varphi}_1(\vec{k}_1 s_1',\, \vec{k}_2 s_2')\;\; \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)$$

$$- \frac{g}{2(m^-)^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2 \Big\{ F_1^+(\vec{p}_1^{\,2})\, u^+_{\alpha_1}(\vec{p}_1 s_1)\, \gamma^i_{\alpha_1\beta_1}\, p_{1i}\, u_{\beta_1}(\vec{k}_1 s_1')$$

$$+ F_2^+(\vec{p}_1^{\,2})\, u^+_{\alpha_1}(\vec{p}_1 s_1)\, u_{\alpha_1}(\vec{k}_1 s_1')\Big\}\, \bar{u}_{\alpha_2}(\vec{p}_2 s_2)\, u_{\alpha_2}(\vec{k}_2 s_2')$$

$$\cdot\, \tilde{\varphi}_1(\vec{k}_1 s_1',\, \vec{k}_2 s_2')\;\; \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)$$

$$= 0 \;.$$

Wir verwenden die Formeln (A.18) - (A.20) aus Anhang A und erhalten als Ergebnis für (4.43b) die Gleichung

$$2\, Z(\vec{p}_1, \vec{p}_2)\;\; \tilde{\varphi}_2(\vec{p}_1 s_1,\, \vec{p}_2 s_2)$$

$$- M^+(\vec{p}_1, \vec{p}_2)\, \Big\{ \tilde{\varphi}_1(\vec{p}_1 s_1,\, \vec{p}_2 s_2) + \tilde{\varphi}_3(\vec{p}_1 s_1,\, \vec{p}_2 s_2)\Big\}$$

$$- \frac{g}{2(m^-)^2}\;\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2\;\; \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)\, N_{\vec{p}_1}\, N_{\vec{p}_2}\, N_{\vec{k}_1}\, N_{\vec{k}_2}$$

$$\cdot \Big\{ F_1^+(\vec{p}_2^{\,2})\,(E_{\vec{p}_2} + m^+)\Big[\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{(E_{\vec{p}_2} + m^+)^2}\;\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{(E_{\vec{p}_2} + m^+)^2}\; B_{s_2 s_1'}(\vec{p}_2, \vec{k}_1)\,\delta_{s_2 s_2'}$$

$$- \delta_{s_1 s_1'}\, B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2, \vec{k}_2) \;+\; B_{s_2 s_1'}(\vec{p}_2, \vec{k}_1)\, B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2, \vec{k}_2)\Big]$$

$$+ F_2^+(\vec{p}_2^{\,2}) \Big[\delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1, \vec{k}_1)\, \delta_{s_2 s_2'} + \delta_{s_1 s_1'} B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2, \vec{k}_2)$$

$$- B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1, \vec{k}_1)\, B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2, \vec{k}_2) \Big]$$

$$+ F_1^+(\vec{p}_1^{\,2})(E_{\vec{p}_1} + m^+) \Big[\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1} + m^+)^2} \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1} + m^+)^2} \delta_{s_1 s_1'} B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2, \vec{k}_2)$$

$$- B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1, \vec{k}_1)\, \delta_{s_2 s_2'} + B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1, \vec{k}_1)\, B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2, \vec{k}_2) \Big]$$

$$+ F_2^+(\vec{p}_1^{\,2}) \Big[\delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} + B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1, \vec{k}_1)\, \delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'} B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2, \vec{k}_2)$$

$$- B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1, \vec{k}_1)\, B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2, \vec{k}_2) \Big] \Big\} \tilde{\varphi}_1(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2') = 0 \,, \tag{4.48b}$$

wobei wir die Abkürzung

$$B_{ss'}(\vec{p}, \vec{k}) := \frac{1}{(E_{\vec{p}} + m^+)(E_{\vec{k}} + m^+)} \left\{ \vec{p}\vec{k}\, \delta_{ss'} + i\, \vec{\sigma}_{ss'} \cdot (\vec{p} \times \vec{k}) \right\} \tag{4.49}$$

eingeführt haben.
Wie bereits nach Inspektion von Gleichung (4.43b) zu erwarten war, unterscheiden sich die beiden Anteile der Wechselwirkung im Integralkern durch die Vertauschungen

$$\vec{p}_1 \longleftrightarrow \vec{p}_2 \,,$$
$$\vec{k}_1 \longleftrightarrow \vec{k}_2 \,,$$
$$s_1 \longleftrightarrow s_2$$

und

$$s_1' \longleftrightarrow s_2' \,.$$

Nachdem wir die Gleichung (4.48b) ausführlich behandelt haben, lassen sich die beiden übrigen Gleichungen für $\tilde{\varphi}_3$ und $\tilde{\varphi}_4$ leicht angeben:

$$
\begin{aligned}
& Z(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\ \tilde{\varphi}_3(\vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2) \\
& \quad - M^{+}(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\ \tilde{\varphi}_2(\vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2) \;-\; M^{-}(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\ \tilde{\varphi}_4(\vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2) \\
& \quad - \frac{g}{2(m^2)^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2\ \delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{k}_1-\vec{k}_2)\, N_{\vec{p}_1} N_{\vec{p}_2} N_{\vec{k}_1} N_{\vec{k}_2} \\
& \quad \cdot \Big\{ F_1^{-}(\vec{p}_1^{\,2})(E_{\vec{p}_1}+m^2)\Big[\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^2)^2}\,\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^2)^2}\,B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2 s_2'} \\
& \qquad - \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) + B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big] \\
& \quad + F_2^{-}(\vec{p}_1^{\,2})\Big[\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2 s_2'} + \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) \\
& \qquad - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big] \\
& \quad + F_1^{-}(\vec{p}_1^{\,2})(E_{\vec{p}_1}+m^2)\Big[\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^2)^2}\,\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^2)^2}\,\delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) \\
& \qquad - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2 s_2'} + B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big] \\
& \quad + F_2^{-}(\vec{p}_1^{\,2})\Big[\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} + B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) \\
& \qquad - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big]\Big\}\ \tilde{\varphi}_4(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2') \;=\; 0
\end{aligned}
\tag{4.48c}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\, Z(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\;\; \tilde{\varphi}_4(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2) \\
&+\; M^-(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\;\Big\{\tilde{\varphi}_4(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2) - \tilde{\varphi}_3(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2)\Big\} \\
&+\; \frac{g}{2(m^-)^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2\;\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{k}_1-\vec{k}_2)\; N_{\vec{p}_1} N_{\vec{p}_2} N_{\vec{k}_1} N_{\vec{k}_2} \\
&\cdot\Big\{ F_1^+(\vec{p}_1^{\,2})\,(E_{\vec{p}_1}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{(E_{\vec{p}_2}+m^+)^2}\,\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{(E_{\vec{p}_2}+m^+)^2}\,B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2 s_2'} \\
&\qquad - \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) + B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big] \\
&\quad + F_2^+(\vec{p}_1^{\,2})\Big[\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2 s_2'} + \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) \\
&\qquad - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big] \\
&\quad - F_1^+(\vec{p}_1^{\,2})\,(E_{\vec{p}_1}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^+)^2}\,\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^+)^2}\,\delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) \\
&\qquad - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2 s_2'} + B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big] \\
&\quad - F_2^+(\vec{p}_1^{\,2})\Big[\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} + B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) \\
&\qquad - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big]\Big\}\;\tilde{\varphi}_4(\vec{k}_1 s_1',\vec{k}_2 s_2') \;=\; 0
\end{aligned}
\tag{4.48d}
$$

Wichtig ist, daß mit dem hier vorgestellten Formalismus die Inversion des Operators $\mathcal{M}^+$ auf die Division durch die nichtsinguläre Funktion $M^+(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$ zurückgeführt wird. Dies ist ein entscheidender Schritt, um das Gleichungssystem (4.43) aufzulösen. Zur weiteren Vereinfachung gehen wir im nächsten Abschnitt zum Schwerpunktsystem über.

4.5 Schwerpunktsystem

Um die Schwerpunktbewegung abzuspalten, machen wir den Ansatz <30>

$$\varphi_i(\vec{x}_1,\sigma_1,\vec{x}_2,\sigma_2) = e^{i\vec{P}\vec{x}_s}\,\hat{\varphi}_i(\vec{x}_r,\sigma_1,\sigma_2) \tag{4.50}$$

mit den Schwerpunkt- und Relativkoordinaten

$$\vec{x}_s := \tfrac{1}{2}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$$

und

$$\vec{x}_r := \vec{x}_1-\vec{x}_2 \ .$$

Für die Funktionen φ_i (i=1,...,4) folgt dann aus (4.45b)

$$\tilde{\varphi}_i(\vec{k}_1,s_1,\vec{k}_2,s_2) = \delta(\vec{P}-\vec{k}_s)\,\hat{\tilde{\varphi}}_i(\vec{k}_r,s_1,s_2\,|\,\vec{k}_s) \tag{4.51}$$

mit dem Gesamtimpuls

$$\vec{k}_s := \vec{k}_1+\vec{k}_2$$

und dem Relativimpuls

$$\vec{k}_r := \tfrac{1}{2}(\vec{k}_1-\vec{k}_2) \ .$$

Man sieht sofort, daß für i=1,2,3 aufgrund der Antisymmetrie der Funktionen $\tilde{\varphi}_i$ (4.45c)

$$\hat{\tilde{\varphi}}_i(\vec{k}_r, s_1 s_2 | \vec{k}_s) = -\hat{\tilde{\varphi}}_i(-\vec{k}_r, s_2 s_1 | \vec{k}_s) \tag{4.52}$$

gilt. Die Funktion $\hat{\tilde{\varphi}}_4$ zeigt ein symmetrisches Verhalten bei Vertauschung von $s_1 \leftrightarrow s_2$ und $\vec{k}_r \leftrightarrow -\vec{k}_r$.

Für $\vec{k}_s = 0$ schreiben wir der Einfachheit halber

$$\varphi_i(\vec{k}, s_1 s_2) := \hat{\tilde{\varphi}}_i(\vec{k}_r, s_1 s_2 | \vec{k}_s = 0) \ , \tag{4.53}$$

das heißt, wir lassen sowohl "$\vec{k}_s = 0$" als auch "$\hat{=}$" weg und bezeichnen mit $\vec{k}$ den Relativimpuls $\vec{k}_r$.
Wir formulieren nun die Gleichungen (4.48) im Ruhesystem. Hierzu verwenden wir (4.51) und setzen anschließend $\vec{P}=0$.
Als Ergebnis erhalten wir für die erste Gleichung (4.48a)

$$Z(\vec{p})\ \varphi_1(\vec{p}, s_1 s_2) - M^+(\vec{p})\ \varphi_2(\vec{p}, s_1 s_2) = 0 \tag{4.54a}$$

mit

$$Z(\vec{p}) := Z(\vec{p}_1, \vec{p}_2)\Big|_{\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}} = E - 2E_{\vec{p}} \tag{4.55}$$

und entsprechend

$$M^+(\vec{p}) := M^+(\vec{p}_1, \vec{p}_2)\Big|_{\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}} = \frac{2 m^- m^+}{E_{\vec{p}}} \ . \tag{4.56}$$

Zu beachten ist, daß die Anwendung von $M^-(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ auf eine Funktion $\tilde{\varphi}_i(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ nach dem Übergang ins Ruhesystem Null ergibt. Da $Z(\vec{p})$ (4.55) und $M^+(\vec{p})$ (4.56) jeweils nur ein Argument enthalten im Gegensatz zu $Z(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ (4.46) und $M^+(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ (4.47), sollte keine Gefahr der Verwechslung bestehen, und wir haben deshalb darauf verzichtet, neue Symbole einzuführen.

Durch den Übergang ins Ruhesystem vereinfacht sich auch der Wechselwirkungsterm, und das Ergebnis für die zweite Gleichung (4.48b) lautet

$$
\begin{aligned}
& 2\, Z(\vec{p})\, \varphi_2(\vec{p}, s_1 s_2) \\
& \quad - M^+(\vec{p}) \left\{ \varphi_1(\vec{p}, s_1 s_2) + \varphi_3(\vec{p}, s_1 s_2) \right\} \\
& \quad - \frac{g}{2(m^-)^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\; N_{\vec{p}}^2\; N_{\vec{k}}^2 \\
& \quad \cdot \Big\{ F_1^+(\vec{p}^2)(E_{\vec{p}} + m^+) \Big[\frac{\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}} + m^+)^2} \big(2\, \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'} B_{s_2 s_2'}(\vec{p}, \vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}, \vec{k}) \delta_{s_2 s_2'} \big) \\
& \qquad - \delta_{s_1 s_1'} B_{s_2 s_2'}(\vec{p}, \vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}, \vec{k}) \delta_{s_2 s_2'} + 2\, B_{s_1 s_1'}(\vec{p}, \vec{k})\, B_{s_2 s_2'}(\vec{p}, \vec{k}) \Big] \\
& \quad + F_2^+(\vec{p}^2) \big(2\, \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} - 2\, B_{s_1 s_1'}(\vec{p}, \vec{k})\, B_{s_2 s_2'}(\vec{p}, \vec{k}) \big) \Big\} \varphi_1(\vec{k}, s_1' s_2') \\
& = 0 \quad . \qquad (4.54b)
\end{aligned}
$$

Die Gleichung für $\varphi_3(\vec{p})$ läßt sich damit sofort hinschreiben, der "freie Anteil" ist durch

$$Z(\vec{p})\, \varphi_3(\vec{p}, s_1 s_2) - M^+(\vec{p})\, \varphi_2(\vec{p}, s_1 s_2)$$

gegeben, und der Wechselwirkungsanteil stimmt mit demjenigen von (4.54b) überein, es ist dabei nur $F_{1/2}^+$ durch $F_{1/2}^-$ zu ersetzen:

$$
\begin{aligned}
&Z(\vec{p})\ \varphi_3(\vec{p}, s_1 s_2) \\
&\quad - M^+(\vec{p})\ \varphi_2(\vec{p}, s_1 s_2) \\
&\quad - \frac{g}{2(m^-)^2}\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\ N_{\vec{p}}^2\ N_{\vec{k}}^2 \\
&\quad \cdot \Big\{ F_1^-(\vec{p}^2)(E_{\vec{p}} + m^+)\Big[\frac{\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}}+m^+)^2}\Big(2\delta_{s_1 s_1'}\delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'} B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\delta_{s_2 s_2'}\Big) \\
&\qquad - \delta_{s_1 s_1'} B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\delta_{s_2 s_2'} + 2 B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\, B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k})\Big] \\
&\qquad + F_2^-(\vec{p}^2)\Big(2\delta_{s_1 s_1'}\delta_{s_2 s_2'} - 2 B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\, B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k})\Big)\Big\}\ \varphi_1(\vec{k}, s_1' s_2') \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.54c}
$$

Dagegen enthält die Gleichung für φ_4 wieder die Funktionen F_1^+ und F_2^+, und aus (4.43d) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&2\, Z(\vec{p})\ \varphi_4(\vec{p}, s_1 s_2) \\
&\quad - \frac{g}{2(m^-)^2}\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\ N_{\vec{p}}^2\ N_{\vec{k}}^2 \Big\{ m^+ F_1^+(\vec{p}^2) - F_2^+(\vec{p}^2)\Big\} \\
&\quad \cdot \Big\{ \delta_{s_1 s_1'} B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2 s_2'}\Big\}\ \varphi_1(\vec{k}, s_1' s_2') \\
&= 0\ .
\end{aligned}
\tag{4.54d}
$$

Der besseren Überschaubarkeit wegen schreiben wir das Gleichungssystem (4.54) in der symbolischen Form

$$Z\varphi_1 - M^+\varphi_2 = 0 \quad ;$$

$$2Z\varphi_2 - M^+ (\varphi_1 + \varphi_3) - V^+\varphi_1 = 0 \quad ,$$

$$Z\varphi_3 - M^+\varphi_2 - W^+\varphi_1 = 0 \quad ,$$

und

$$2Z\varphi_4 - V^-\varphi_1 = 0 \quad . \tag{4.57}$$

Die Bedeutung der Symbole ergibt sich im Vergleich mit (4.54), insbesondere ist zu beachten, daß $V^{\pm}$ und $W^{\pm}$ als Abkürzungen für Integralkerne stehen. Wir sehen, daß die ersten drei Gleichungen keine Kopplung an die symmetrische Funktion φ_4 enthalten und ein geschlossenes Gleichungssystem für die drei antisymmmetrischen Funktionen φ_1, φ_2 und φ_3 bilden.

Mit

$$M^{-1} = M^{-1}(\vec{p}) := [M^+(\vec{p})]^{-1} = \frac{E_{\vec{p}}}{2m^- m^+} \tag{4.58}$$

können wir dieses System nach φ_1 auflösen und erhalten

$$\varphi_2 = M^{-1}Z\varphi_1 \quad , \tag{4.59a}$$

$$\varphi_3 = 2M^{-1}ZM^{-1}Z\varphi_1 - \varphi_1 - M^{-1}V^+\varphi_1 \tag{4.59b}$$

und

$$2ZM^{-1}ZM^{-1}Z\varphi_1 - 2Z\varphi_1 - ZM^{-1}V^+\varphi_1 - W^+\varphi_1 = 0 \quad . \tag{4.59c}$$

Da Z und M gewöhnliche Funktionen sind, finden wir als Ergebnis für φ_1

$$2M^{-2}Z^3\varphi_1 - 2Z\varphi_1 - M^{-1}ZV^+\varphi_1 - W^+\varphi_1 = 0 \quad ,$$

und nach Division durch 2 lautet diese Gleichung in ausführlicher Form

$$[M^{-2}(\vec{p})\ Z^3(\vec{p}) - Z(\vec{p})]\ \varphi_1(\vec{p},s_1,s_2)$$

$$-\frac{g}{4(m^-)^2}\ \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\ N_{\vec{p}}^2\ N_{\vec{k}}^2\ M^{-1}(\vec{p})\ Z(\vec{p})$$

$$\cdot\Big\{ F_1^+(\vec{p}^2)\,(E_{\vec{p}}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}}+m^+)^2}\ \big(2\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'} - \delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\delta_{s_2s_2'}\big)$$

$$- \delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\delta_{s_2s_2'} + 2B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})\Big]$$

$$+ F_2^+(\vec{p}^2)\ \big(2\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'} - 2B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})\big)\Big\}\ \varphi_1(\vec{k},s_1',s_2')$$

$$-\frac{g}{4(m^-)^2}\ \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\ N_{\vec{p}}^2\ N_{\vec{k}}^2$$

$$\cdot\Big\{ F_1^-(\vec{p}^2)\,(E_{\vec{p}}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}}+m^+)^2}\ \big(2\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'} - \delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\delta_{s_2s_2'}\big)$$

$$- \delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\delta_{s_2s_2'} + 2B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})\Big]$$

$$+ F_2^-(\vec{p}^2)\ \big(2\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'} - 2B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})\big)\Big\}\ \varphi_1(\vec{k},s_1',s_2')$$

$$= 0 \quad . \qquad (4.60)$$

In Abschnitt 4.7 werden wir auf diese Integralgleichung zurückkommen. Zuvor wollen wir die in 4.2 bis 4.5 durchgeführten Überlegungen auf die Linkslösung anwenden.

4.6 Linkslösung

Da die bisherigen Rechnungen für die Rechtslösung sehr ausführlich dargestellt wurden, beschränken wir uns in diesem Abschnitt größtenteils darauf, die entsprechenden Formeln für die Linkslösung anzugeben.

Der zu $|F_2(j,a)>$ duale Zweiteilchenzustand

$$\langle S_2^F(\partial,a)| := -\sigma^F(I_1,I_2|a)\,\langle 0|\partial_{I_2}\partial_{I_1} \tag{4.61}$$

ist eine Linkslösung der Eigenwertgleichung (4.9). Wir beschäftigen uns ab jetzt nur noch mit dem zu $|F(j,a)>$ dualen Funktionalzustand und werden deshalb im folgenden den Index F weglassen.
Entsprechend ist der Zweiteilchenzustand

$$\langle S'(\partial',a)| := -\sigma'(I_1,I_2|a)\,\langle 0|\partial'_{I_2}\partial'_{I_1} \tag{4.62a}$$

mit den antisymmetrischen Funktionen

$$\sigma'(I_1,I_2|a) = \sigma(K_1,K_2|a)\,U_{K_1I_1}\,U_{K_2I_2} \tag{4.62b}$$

eine Linkslösung der transformierten Eigenwertgleichung (4.20). Diese Gleichung lautet nach Einsetzen von (4.62a) und unter Verwendung der AVR (4.16) und Gleichung (3.7)

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\partial'_{I_2}\ \partial'_{I_1}\quad \sigma'(I_1,I_2|a)\ E \\
&\quad = 2\ \langle 0|\ \partial'_{I_3}\ \sigma'(I'_1,I_3|a)\ U_{I'_1I_1}\ K_{I_1I_2}\ U_{I_2I'_2}\ \partial'_{I'_2} \\
&\qquad + 2\ \langle 0|\ \sigma'(I'_1,I'|a)\ U_{I'_1I_1}\ \hat{V}_{I_1I_2I_3I_4}\ F_{I_2I}\ U_{II'} \\
&\qquad\qquad \cdot U_{I_3I'_3}\ \partial'_{I'_3}\ U_{I_4I'_4}\ \partial'_{I'_4}\ . \qquad (4.63)
\end{aligned}
$$

Während wir die Rechtslösung (4.21) von links mit

$$\langle 0|\partial'_{K_2}\ \partial'_{K_1}$$

multiplizierten, wenden wir auf Gleichung (4.63) von rechts

$$j'_{K_1}\ j'_{K_2}|0\rangle$$

an und erhalten als Eigenwertproblem das folgende Gleichungssystem für die Funktionen σ':

$$
\begin{aligned}
&\sigma'(k_1,k_2|a)\ E \\
&\quad = \sigma'(I'_1,k_2|a)\ U_{I'_1I_1}\ K_{I_1I_2}\ U_{I_2k_1} \\
&\qquad + \sigma'(k_1,I'_1|a)\ U_{I'_1I_1}\ K_{I_1I_2}\ U_{I_2k_2} \\
&\qquad + \sigma'(I'_1,I'|a)\ U_{I'_1I_1}\ \hat{V}_{I_1I_2I_3I_4}\ F_{I_2I}\ U_{II'} \\
&\qquad\qquad \cdot \{U_{I_3k_2}\ U_{I_4k_1} - U_{I_3k_1}\ U_{I_4k_2}\} \qquad (4.64)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist das Gegenstück zur projizierten Eigenwertgleichung (4.23), und durch Vergleich von (4.23) und (4.64) stellen wir nach Umbenennen fest, daß σ' gerade die Linkslösung von (4.23) ist.
Wie in (4.24) spalten wir das Indexsystem in

$$K \equiv k,b \qquad \text{und} \qquad I \equiv i,a$$

auf, und um die Indizes k=1,2 besser hervorzuheben, definieren wir in Analogie zu (4.17c) die Funktionen

$$\sigma(\overset{\rho}{b_1},\overset{\rho}{b_2}) := \sigma'(1b_1,1b_2|a) \quad ,$$

$$\sigma(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) := \sigma'(1b_1,2b_2|a) \quad ,$$

$$\sigma(\overset{\chi}{b_1},\overset{\rho}{b_2}) := \sigma'(2b_1,1b_2|a)$$

und

$$\sigma(\overset{\chi}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) := \sigma'(2b_1,2b_2|a) \quad . \tag{4.65}$$

Mit Hilfe der Formeln (4.26) - (4.29) können wir aus (4.64) vier Gleichungen für die vier Funktionen $\sigma^{\rho\rho}$, $\sigma^{\rho\chi}$, $\sigma^{\chi\rho}$ und $\sigma^{\chi\chi}$ ableiten:

$\underline{(k_1,k_2) = (1,1):}$

$$\sigma(\overset{s}{b_1},\overset{s}{b_2})\, E = \sigma(\overset{s}{a},\overset{s}{b_2})\, K^{+}_{ab_1} + \sigma(\overset{s}{b_1},\overset{s}{a})\, K^{+}_{ab_2}$$

$$+ \sigma(a_1^{\times}, b_2^{\$})\, K^{-}_{a b_1} + \sigma(b_1^{\$}, a^{\times})\, K^{-}_{a b_2}$$

$$+ 4\,\sigma(a_1^{\times}, a^{\$}) \left\{ \hat{V}_{a_1 a_2 b_2 b_1} - \hat{V}_{a_1 a_2 b_1 b_2} \right\} F^{+}_{a_2 a}$$

$$+ 4\,\sigma(a_1^{\times}, a^{\times}) \left\{ \hat{V}_{a_1 a_2 b_2 b_1} - \hat{V}_{a_1 a_2 b_1 b_2} \right\} F^{-}_{a_2 a} \qquad (4.66a)$$

$(k_1, k_2) = (1,2)$:

$$\sigma(b_1^{\$}, b_2^{\times})\, E$$

$$= \sigma(a^{\$}, b_2^{\times})\, K^{+}_{a b_1} + \sigma(b_1^{\$}, a^{\times})\, K^{+}_{a b_2}$$

$$+ \sigma(a^{\times}, b_2^{\times})\, K^{-}_{a b_1} + \sigma(b_1, a)\, K^{-}_{a b_2} \qquad (4.66b)$$

$(k_1, k_2) = (2,1)$:

$$\sigma(b_1^{\times}, b_2^{\$})\, E$$

$$= \sigma(a^{\times}, b_2^{\$})\, K^{+}_{a b_1} + \sigma(b_1^{\times}, a^{\$})\, K^{+}_{a b_2}$$

$$+ \sigma(a^{\$}, b_2^{\$})\, K^{-}_{a b_1} + \sigma(b_1^{\times}, a^{\times})\, K^{-}_{a b_2} \qquad (4.66c)$$

$(k_1, k_2) = (2,2)$:

$$\sigma(b_1^{\times}, b_2^{\times})\, E$$

$$= \sigma(a^{\times}, b_2^{\times})\, K^{+}_{a b_1} + \sigma(b_1^{\times}, a^{\times})\, K^{+}_{a b_2}$$

$$+ \sigma(a^{\$}, b_2^{\times})\, K^{-}_{a b_1} + \sigma(b_1^{\times}, a^{\$})\, K^{-}_{a b_2} \qquad (4.66d)$$

Wegen

$$\sum_{i_1 i_2} U_{I_1 K_1}\, U_{I_2 K_2} = \sum_{i_1 i_2} U_{i_1 a_1, k_1 b_1}\, U_{i_2 a_2, k_2 b_2}$$

$$= \begin{cases} 2\,\delta_{a_1 b_1}\,\delta_{a_2 b_2} & \text{für } k_1 = k_2 = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

enthält nur die erste Gleichung (4.66a) für $\sigma^{\rho\rho}$ einen Wechselwirkungsterm. Wir erinnern uns, daß dagegen das Gleichungssystem (4.30) nur eine Gleichung aufwies, und zwar auch die erste Gleichung für $\varphi^{\rho\rho}$, die <u>keinen</u> Wechselwirkungsanteil enthielt. Trotzdem lassen sich die beiden Gleichungssysteme (4.30) und (4.66) als Links- und Rechtslösung <u>einer</u> Gleichung betrachten. Um dies zu sehen, zerlegen wir analog zu (4.32) die Funktion $\sigma^{\rho\chi}$ in den antisymmetrischen Anteil

$$\sigma_a(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) := \tfrac{1}{2}(\sigma(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) - \sigma(\overset{\rho}{b_2},\overset{\chi}{b_1})) \tag{4.67a}$$

und in den symmetrischen Anteil

$$\sigma_s(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) := \tfrac{1}{2}(\sigma(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) + \sigma(\overset{\rho}{b_2},\overset{\chi}{b_1})) \quad , \tag{4.67b}$$

so daß

$$\sigma(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) = \sigma_a(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) + \sigma_s(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) \tag{4.67c}$$

und

$$\sigma(\overset{\chi}{b_1},\overset{\rho}{b_2}) = -\sigma(\overset{\rho}{b_2},\overset{\chi}{b_1})$$

$$= \sigma_a(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) - \sigma_s(\overset{\rho}{b_1},\overset{\chi}{b_2}) \tag{4.67d}$$

gilt.

Wir setzen

$$\sigma_1 := \sigma^{\rho\rho} \quad , \quad \sigma_2 := \sigma_a^{\rho\chi} \quad , \quad \sigma_3 := \sigma^{\chi\chi} \quad , \quad \sigma_4 := \sigma_s^{\rho\chi} \quad , \tag{4.68}$$

und mit den Definitionen (4.34a) und (4.35a) können wir die erste Gleichung (4.66a) in der Form

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(a_1,a_2)\; Z_{a_1a_2,b_1b_2} \\
&\quad - \sigma_2(a_1,a_2)\; M^{+}_{a_1a_2,b_1b_2} \\
&\quad + \sigma_4(a_1,a_2)\; M^{-}_{a_1a_2,b_1b_2} \\
&\quad + 4\sigma_2(a_1,a_2)\left\{\hat{V}_{a_1 b b_1 b_2}\, F^{+}_{b a_2} + \hat{V}_{a_2 b b_2 b_1}\, F^{+}_{b a_1}\right\} \\
&\quad + 4\sigma_3(a_1,a_2)\left\{\hat{V}_{a_1 b b_1 b_2}\, F^{-}_{b a_2} + \hat{V}_{a_2 b b_2 b_1}\, F^{-}_{b a_1}\right\} \\
&\quad - 4\sigma_4(a_1,a_2)\left\{\hat{V}_{a_1 b b_1 b_2}\, F^{+}_{b a_2} - \hat{V}_{a_2 b b_2 b_1}\, F^{+}_{b a_1}\right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.69a}$$

schreiben.
Hierbei haben wir zusätzlich die Antisymmetrie von σ_2 und σ_3 und die Symmetrie von σ_4 verwendet.

Anstelle der beiden Gleichungen (4.66b) und (4.66c) betrachten wir auch hier deren Summe

$$\begin{aligned}
&\sigma_2(a_1,a_2)\; 2\, Z_{a_1a_2,b_1b_2} \\
&\quad - \sigma_1(a_1,a_2)\; M^{+}_{a_1a_2,b_1b_2} \\
&\quad - \sigma_3(a_1,a_2)\; M^{+}_{a_1a_2,b_1b_2} = 0
\end{aligned} \tag{4.69b}$$

und Differenz

$$\sigma_4(a_1,a_2)\ 2\ Z_{a_1a_2,b_1b_2} + \sigma_1(a_1,a_2)\ M^-_{a_1a_2,b_1b_2} - \sigma_3(a_1,a_2)\ M^-_{a_1a_2,b_1b_2} = 0\ . \qquad (4.69d)$$

Für die vierte Gleichung schließlich erhalten wir

$$\sigma_3(a_1,a_2)\ Z_{a_1a_2,b_1b_2} - \sigma_2(a_1,a_2)\ M^+_{a_1a_2,b_1b_2} - \sigma_4(a_1,a_2)\ M^-_{a_1a_2,b_1b_2} = 0\ . \qquad (4.69c)$$

Die Gleichungen (4.69a-d) können wir in Analogie zu (4.37) symbolisch als Matrixgleichung schreiben mit

$$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)\begin{bmatrix} \gamma & -\mathcal{M}^+ & 0 & \mathcal{M}^- \\ 4\mathcal{W}^+ - \mathcal{M}^+ & 2\gamma & -\mathcal{M}^+ & 0 \\ 4\mathcal{W}^+ & -\mathcal{M}^+ & \gamma & -\mathcal{M}^- \\ -4\mathcal{W}^- + \mathcal{M}^- & 0 & -\mathcal{M}^- & 2\gamma \end{bmatrix} = 0\ , \qquad (4.70)$$

und durch Vergleich mit (4.37) stellen wir fest, daß die beiden "Operator-Matrizen" übereinstimmen. Die Funktionen σ sind also -nicht nur symbolisch, sondern tatsächlich- eine Linkslösung des Gleichungssystems, wo φ eine Rechtslösung ist.
Auch hier treffen innerhalb der Gleichungen für σ_1, σ_2 und σ_3 in konsistenter Weise symmetrische Operatoren auf antisymmetrische Funktionen und antisymmetrische Operatoren auf symmetrische Funktionen. Das entgegengesetzte Verhalten zeigt die vierte Gleichung für σ_4 .

Wir setzen

$$\sigma_1 := \sigma^{\rho\rho} \quad , \quad \sigma_2 := \sigma_a^{\rho\chi} \quad , \quad \sigma_3 := \sigma^{\chi\chi} \quad , \quad \sigma_4 := \sigma_s^{\rho\chi} \quad , \tag{4.68}$$

und mit den Definitionen (4.34a) und (4.35a) können wir die erste Gleichung (4.66a) in der Form

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(a_1,a_2)\, Z_{a_1a_2,b_1b_2} \\
&- \sigma_2(a_1,a_2)\, M^{+}_{a_1a_2,b_1b_2} \\
&+ \sigma_4(a_1,a_2)\, M^{-}_{a_1a_2,b_1b_2} \\
&+ 4\sigma_2(a_1,a_2)\left\{ \hat{V}_{a_1 b\, b_1 b_2} F^{+}_{b a_2} + \hat{V}_{a_2 b\, b_2 b_1} F^{+}_{b a_1} \right\} \\
&+ 4\sigma_3(a_1,a_2)\left\{ \hat{V}_{a_1 b\, b_1 b_2} F^{-}_{b a_2} + \hat{V}_{a_2 b\, b_2 b_1} F^{-}_{b a_1} \right\} \\
&- 4\sigma_4(a_1,a_2)\left\{ \hat{V}_{a_1 b\, b_1 b_2} F^{+}_{b a_2} - \hat{V}_{a_2 b\, b_2 b_1} F^{+}_{b a_1} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.69a}$$

schreiben.
Hierbei haben wir zusätzlich die Antisymmetrie von σ_2 und σ_3 und die Symmetrie von σ_4 verwendet.

Anstelle der beiden Gleichungen (4.66b) und (4.66c) betrachten wir auch hier deren Summe

$$\begin{aligned}
&\sigma_2(a_1,a_2)\; 2\, Z_{a_1a_2,b_1b_2} \\
&- \sigma_1(a_1,a_2)\, M^{+}_{a_1a_2,b_1b_2} \\
&- \sigma_3(a_1,a_2)\, M^{+}_{a_1a_2,b_1b_2} = 0
\end{aligned} \tag{4.69b}$$

und Differenz

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1 \underset{\alpha_1}{(y_1,} \underset{\alpha_2}{y_2)} \; Z_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}(y_1, y_2) \\
&- \sigma_2 \underset{\alpha_1}{(y_1,} \underset{\alpha_2}{y_2)} \; M^{+}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} \\
&+ \sigma_4 \underset{\alpha_1}{(y_1,} \underset{\alpha_2}{y_2)} \; M^{-}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} \\
&+ \frac{4g}{m^-} \int \sigma_2 \underset{\alpha_1}{(y_1,} \underset{\alpha_2}{x)} \gamma^0_{\alpha_1\beta_1} \gamma^0_{\beta\beta_2} F^{+} \underset{12\beta}{(y_1,} \underset{11\alpha_2}{x)} \delta(y_1 - y_2)\, dx \\
&+ \frac{4g}{m^-} \int \sigma_2 \underset{\alpha_1}{(x,} \underset{\alpha_2}{y_2)} \gamma^0_{\alpha_2\beta_2} \gamma^0_{\beta\beta_1} F^{+} \underset{12\beta}{(y_2,} \underset{11\alpha_1}{x)} \delta(y_1 - y_2)\, dx \\
&+ \frac{4g}{m^-} \int \sigma_3 \underset{\alpha_1}{(y_1,} \underset{\alpha_2}{x)} \gamma^0_{\alpha_1\beta_2} \gamma^0_{\beta\beta_2} F^{-} \underset{12\beta}{(y_1,} \underset{11\alpha_2}{x)} \delta(y_1 - y_2)\, dx \\
&+ \frac{4g}{m^-} \int \sigma_3 \underset{\alpha_1}{(x,} \underset{\alpha_2}{y_2)} \gamma^0_{\alpha_2\beta_2} \gamma^0_{\beta\beta_1} F^{-} \underset{12\beta}{(y_2,} \underset{11\alpha_1}{x)} \delta(y_1 - y_2)\, dx \\
&- \frac{4g}{m^-} \int \sigma_4 \underset{\alpha_1}{(y_1,} \underset{\alpha_2}{x)} \gamma^0_{\alpha_1\beta_1} \gamma^0_{\beta\beta_2} F^{+} \underset{12\beta}{(y_1,} \underset{11\alpha_2}{x)} \delta(y_1 - y_2)\, dx \\
&+ \frac{4g}{m^-} \int \sigma_4 \underset{\alpha_1}{(x,} \underset{\alpha_2}{y_2)} \gamma^0_{\alpha_2\beta_2} \gamma^0_{\beta\beta_1} F^{+} \underset{12\beta}{(y_2,} \underset{11\alpha_1}{x)} \delta(y_1 - y_2)\, dx \\
&= 0 \qquad (4.71a)
\end{aligned}
$$

Die restlichen drei Gleichungen sind bedeutend einfacher:

$$\sigma_2(y_1, y_2)\ 2 Z_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}(y_1, y_2)$$

$$- \left\{ \sigma_1(\underset{\alpha_1}{y_1}, \underset{\alpha_2}{y_2}) + \sigma_3(\underset{\alpha_1}{y_1}, \underset{\alpha_2}{y_2}) \right\} M^{+}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} = 0 \qquad (4.71b)$$

$$\sigma_3(y_1, y_2)\ Z_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}(y_1, y_2)$$

$$- \sigma_2(\underset{\alpha_1}{y_1}, \underset{\alpha_2}{y_2})\ M^{+}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}$$

$$- \sigma_4(\underset{\alpha_1}{y_1}, \underset{\alpha_2}{y_2})\ M^{-}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} = 0 \qquad (4.71c)$$

$$\sigma_4(y_1, y_2)\ 2 Z_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}(y_1, y_2)$$

$$+ \left\{ \sigma_1(\underset{\alpha_1}{y_1}, \underset{\alpha_2}{y_2}) - \sigma_3(\underset{\alpha_1}{y_1}, \underset{\alpha_2}{y_2}) \right\} M^{-}_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} = 0 \qquad (4.71d)$$

Wir gehen zu gleichen Zeiten $y_1^0 = y_2^0 = 0$ über und entwickeln die Funktionen

$$\sigma_i(\underset{\alpha_1}{\vec{y}_1}, \underset{\alpha_2}{\vec{y}_2}) \equiv \sigma_i(0, \underset{\alpha_1}{\vec{y}_1}, 0, \underset{\alpha_2}{\vec{y}_2}) \qquad (i=1,..,4)$$

nach Lösungen der freien Diracgleichung zur Masse m^+:

$$\sigma_i \left(\vec{y}_1 , \vec{y}_2 \right)_{\alpha_1 \; \alpha_2}$$

$$= \sum_{s_1, s_2 = 1}^{2} \int \tilde{\sigma}_i \left(\vec{p}_1 s_1 , \vec{p}_2 s_2 \right) \; u^{+}_{\alpha_1} \left(\vec{p}_1 s_1 \right) \; u^{+}_{\alpha_2} \left(\vec{p}_2 , s_2 \right) \; e^{-i \vec{p}_1 \vec{y}_1} \; e^{-i \vec{p}_2 \vec{y}_2} \; d\vec{p}_1 \; d\vec{p}_2 \tag{4.72a}$$

mit

$$\tilde{\sigma}_i \left(\vec{p}_1 s_1 , \vec{p}_2 s_2 \right)$$

$$= \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int \sigma_i \left(\vec{y}_1 , \vec{y}_2 \right)_{\alpha_1 \; \alpha_2} \; u_{\alpha_1} \left(\vec{p}_1 s_1 \right) \; u_{\alpha_2} \left(\vec{p}_2 s_2 \right) \; e^{i \vec{p}_1 \vec{y}_1} \; e^{i \vec{p}_2 \vec{y}_2} \; d\vec{y}_1 \; d\vec{y}_2 \; . \tag{4.72b}$$

Die Funktionen $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ sind antisymmetrisch, $\tilde{\sigma}_4$ ist symmetrisch.
Ganz analog zu unserem Vorgehen bei der Rechtslösung können wir nun das Gleichungssystem für die Funktionen $\tilde{\sigma}_i$ ableiten. Dabei ist zu beachten, daß die Ableitungen in den Operatoren Z nach links mit einem Minuszeichen wirken. Die erste Gleichung (4.71a) für die Funktion $\tilde{\sigma}_1$ lautet mit den Definitionen (4.46) und (4.47), den Formeln für die Zweipunktfunktion aus Anhang B und den Formeln (A.18)-(A.20) aus Anhang A:

$$\tilde{\sigma}_1 \left(\vec{k}_1 s_1' , \vec{k}_2 s_2' \right) \; Z \left(\vec{k}_1 , \vec{k}_2 \right)$$

$$- \tilde{\sigma}_2 \left(\vec{k}_1 s_1' , \vec{k}_2 s_2' \right) \; M^{+} \left(\vec{k}_1 , \vec{k}_2 \right) \; + \; \tilde{\sigma}_4 \left(\vec{k}_1 s_1' , \vec{k}_2 s_2' \right) \; M^{-} \left(\vec{k}_1 , \vec{k}_2 \right)$$

$$- \frac{g}{2 (m^{-})^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p}_1 \; d\vec{p}_2 \; \delta \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 \right) \tilde{\sigma}_2 \left(\vec{p}_1 s_1 , \vec{p}_2 s_2 \right) \; N_{\vec{p}_1} \; N_{\vec{p}_2} \; N_{\vec{k}_1} \; N_{\vec{k}_2}$$

$$
\cdot \Big\{ F_1^+(\vec{p}_2^{\,2})\,(E_{\vec{p}_2}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{(E_{\vec{p}_2}+m^+)^2}\,\delta_{s_1s_1'}\,\delta_{s_2s_2'} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{(E_{\vec{p}_2}+m^+)^2}\,B_{s_1s_1'}(\vec{p}_2,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'}
$$

$$
- \delta_{s_1s_1'}\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) + B_{s_1s_1'}(\vec{p}_2,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big]
$$

$$
+ F_2^+(\vec{p}_2^{\,2})\Big[\delta_{s_1s_1'}\,\delta_{s_2s_2'} - B_{s_1s_1'}(\vec{p}_2,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'} + \delta_{s_1s_1'}\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)
$$

$$
- B_{s_1s_1'}(\vec{p}_2,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big]
$$

$$
+ F_1^+(\vec{p}_1^{\,2})\,(E_{\vec{p}_1}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^+)^2}\,\delta_{s_1s_1'}\,\delta_{s_2s_2'} - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^+)^2}\,\delta_{s_1s_1'}\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)
$$

$$
- B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'} + B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big]
$$

$$
+ F_2^+(\vec{p}_1^{\,2})\Big[\delta_{s_1s_1'}\,\delta_{s_2s_2'} - \delta_{s_1s_1'}\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) + B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'}
$$

$$
- B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big]\Big\}
$$

$$
-\frac{g}{2(m^-)^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}_1\,d\vec{p}_2\;\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{k}_1-\vec{k}_2)\;\tilde{C}_3(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2)\;N_{\vec{p}_1}\,N_{\vec{p}_2}\,N_{\vec{k}_1}\,N_{\vec{k}_2}
$$

$$
\cdot \Big\{ F_1^-(\vec{p}_2^{\,2})\,(E_{\vec{p}_2}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{(E_{\vec{p}_2}+m^+)^2}\,\delta_{s_1s_1'}\,\delta_{s_2s_2'} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{(E_{\vec{p}_2}+m^+)^2}\,B_{s_1s_1'}(\vec{p}_2,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'}
$$

$$
- \delta_{s_1s_1'}\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) + B_{s_1s_1'}(\vec{p}_2,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big]
$$

$$
+ F_2^-(\vec{p}_2^{\,2})\Big[\delta_{s_1s_1'}\,\delta_{s_2s_2'} - B_{s_1s_1'}(\vec{p}_2,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'} + \delta_{s_1s_1'}\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)
$$

$$
- B_{s_1s_1'}(\vec{p}_2,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\Big]
$$

$$+ F_1^-(\vec{p}_1^{\,2})(E_{\vec{p}_1}+m^+)\left[\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^+)^2}\,\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'} - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^+)^2}\,\delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\right.$$

$$\left. - B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'} + B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\right]$$

$$+ F_2^-(\vec{p}_1^{\,2})\left[\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'} - \delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) + B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'}\right.$$

$$\left. - B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\right]\Big\}$$

$$+ \frac{g}{2(m^-)^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}_1\,d\vec{p}_2\;\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{k}_1-\vec{k}_2)\;\tilde{C}_4(\vec{p}_1 s_1,\vec{p}_2 s_2)\,N_{\vec{p}_1}\,N_{\vec{p}_2}\,N_{\vec{k}_1}\,N_{\vec{k}_2}$$

$$\cdot\Big\{ F_1^+(\vec{p}_2^{\,2})(E_{\vec{p}_2}+m^+)\left[\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{(E_{\vec{p}_2}+m^+)^2}\,\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{(E_{\vec{p}_2}+m^+)^2}\,B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'}\right.$$

$$\left. - \delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1) + B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\right]$$

$$+ F_2^+(\vec{p}_2^{\,2})\left[\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'} - B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'} + \delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\right.$$

$$\left. - B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\right]$$

$$- F_1^+(\vec{p}_1^{\,2})(E_{\vec{p}_1}+m^+)\left[\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^+)^2}\,\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'} - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{(E_{\vec{p}_1}+m^+)^2}\,\delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\right.$$

$$\left. - B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'} + B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\right]$$

$$- F_2^+(\vec{p}_1^{\,2})\left[\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'} - \delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2) + B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,\delta_{s_2s_2'}\right.$$

$$\left. - B_{s_1s_1'}(\vec{p}_1,\vec{k}_1)\,B_{s_2s_2'}(\vec{p}_2,\vec{k}_2)\right]\Big\} \;=\; 0 \qquad (4.73a)$$

Zur Erinnerung wiederholen wir noch einmal die Definition (4.49):

$$B_{ss'}(\vec{p},\vec{k}) := \frac{1}{(E_{\vec{p}}+m^+)(E_{\vec{k}}+m^+)} \left\{ \vec{p}\vec{k}\,\delta_{ss'} + i\,\vec{\sigma}_{ss'}\cdot(\vec{p}\times\vec{k}) \right\}$$

Gleichung (4.73a) enthält als einen Anteil des Intgralkerns den Integralkern von Gleichung (4.48b), und die übrigen Anteile stimmen gerade mit dem Integralkern der Gleichung für $\tilde{\varphi}_3$ beziehungsweise $\tilde{\varphi}_4$ überein. Dabei sind die Funktionen $\tilde{\sigma}_2$, $\tilde{\sigma}_3$ und $\tilde{\sigma}_4$ stets als Linkslösung zu nehmen, das heißt, anstelle von

$$\int K(\vec{p},\vec{k})\,\tilde{\varphi}(\vec{k})\,d\vec{k}$$

haben wir jetzt Integrale der Form

$$\int \tilde{\sigma}(\vec{p})\,K(\vec{p},\vec{k})\,d\vec{p}$$

zu berechnen.
Die übrigen Gleichungen sind wieder einfacher, und wir finden

$$\tilde{\sigma}_2(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2')\;\; 2\,Z(\vec{k}_1,\vec{k}_2) - \left\{ \tilde{\sigma}_1(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2') + \tilde{\sigma}_3(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2') \right\} M^+(\vec{k}_1,\vec{k}_2) = 0\,, \tag{4.73b}$$

$$\tilde{\sigma}_3(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2')\;\; Z(\vec{k}_1,\vec{k}_2) - \tilde{\sigma}_2(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2')\;\; M^+(\vec{k}_1,\vec{k}_2) - \tilde{\sigma}_4(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2')\;\; M^-(\vec{k}_1,\vec{k}_2) = 0 \tag{4.73c}$$

und

$$\tilde{\sigma}_4(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2')\;\; 2\,Z(\vec{k}_1,\vec{k}_2) + \left\{ \tilde{\sigma}_1(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2') - \tilde{\sigma}_3(\vec{k}_1 s_1', \vec{k}_2 s_2') \right\} M^-(\vec{k}_1,\vec{k}_2) = 0\,. \tag{4.73d}$$

In Analogie zu (4.51) führen wir Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ein vermöge

$$\tilde{\sigma}_i(\vec{k}_1 s_1, \vec{k}_2 s_2) = \delta(\vec{K}-\vec{k}_s)\, \hat{\tilde{\sigma}}_i(\vec{k}_r, s_1 s_2 | \vec{k}_s) \quad . \tag{4.74}$$

Die Funktionen $\hat{\tilde{\sigma}}_i$ weisen bei Vertauschung von $s_1 \leftrightarrow s_2$ und $\vec{k}_r \leftrightarrow -\vec{k}_r$ dasselbe Symmetrieverhalten auf wie die Funktionen $\hat{\tilde{\varphi}}_i$ in (4.52):

$$\hat{\tilde{\sigma}}_i(\vec{k}_r, s_1 s_2 | \vec{k}_s) = -\hat{\tilde{\sigma}}_i(-\vec{k}_r, s_2 s_1 | \vec{k}_s) \qquad (i=1,2,3) \tag{4.75a}$$

und

$$\hat{\tilde{\sigma}}_4(\vec{k}_r, s_1 s_2 | \vec{k}_s) = +\hat{\tilde{\sigma}}_4(-\vec{k}_r, s_2 s_1 | \vec{k}_s) \tag{4.75b}$$

Für $\vec{k}_s=0$ schreiben wir auch hier der Einfachheit halber

$$\sigma_i(\vec{k}, s_1 s_2) := \sigma_i(\vec{k}_r, s_1 s_2 | \vec{k}_s=0) \tag{4.76}$$

mit $\vec{k} \equiv \vec{k}_r$.

Die Gleichungen (4.73a-d) lauten im Ruhesystem mit $\vec{K}=0$

$$\sigma_2(\vec{k}, s_1' s_2')\; 2\, Z(\vec{k}) - \{\sigma_1(\vec{k}, s_1' s_2') + \sigma_3(\vec{k}, s_1' s_2')\}\, M^+(\vec{k}) = 0, \tag{4.77b}$$

$$\sigma_3(\vec{k}, s_1' s_2')\, Z(\vec{k}) - \sigma_2(\vec{k}, s_1' s_2')\, M^+(\vec{k}) = 0, \tag{4.77c}$$

$$\sigma_4(\vec{k}, s_1' s_2')\; 2\, Z(\vec{k}) = 0 \tag{4.77d}$$

und

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1(\vec{k}, s_1' s_2')\; Z(\vec{k}) \;-\; \sigma_2(\vec{k}, s_1' s_2')\; M^+(\vec{k}) \\
&- \frac{g}{2(m^-)^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\;\sigma_2(\vec{p}, s_1 s_2)\; N_{\vec{p}}^2\; N_{\vec{k}}^2 \\
&\cdot\Big\{ F_1^+(\vec{p}^2)\,(E_{\vec{p}}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}}+m^+)^2}\Big(2\,\delta_{s_1 s_1'}\delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2 s_2'}\Big) \\
&\qquad - \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2 s_2'} + 2\,B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k})\Big] \\
&\quad + F_2^+(\vec{p}^2)\Big(2\,\delta_{s_1 s_1'}\delta_{s_2 s_2'} - 2\,B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k})\Big)\Big\} \\
&- \frac{g}{2(m^-)^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\;\sigma_3(\vec{p}, s_1 s_2)\; N_{\vec{p}}^2\; N_{\vec{k}}^2 \\
&\cdot\Big\{ F_1^-(\vec{p}^2)\,(E_{\vec{p}}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}}+m^+)^2}\Big(2\,\delta_{s_1 s_1'}\delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2 s_2'}\Big) \\
&\qquad - \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2 s_2'} + 2\,B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k})\Big] \\
&\quad + F_2^-(\vec{p}^2)\Big(2\,\delta_{s_1 s_1'}\delta_{s_2 s_2'} - 2\,B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k})\Big)\Big\} \\
&- \frac{g}{2(m^-)^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\;\sigma_4(\vec{p}, s_1 s_2)\; N_{\vec{p}}^2\; N_{\vec{k}}^2 \\
&\cdot\Big\{ m^+\,F_1^+(\vec{p}^2) - F_2^+(\vec{p}^2)\Big\}\cdot\Big\{\delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2 s_2'}\Big\} \\
&= 0\;. \qquad (4.77a)
\end{aligned}
$$

Die Definitionen $Z(\vec{k})$ und $M^+(\vec{k})$ finden wir in (4.55) und (4.56).
In symbolischer Form lauten die Gleichungen (4.77)

$$\sigma_1 Z - \sigma_2 M^+ - \sigma_2 V^+ - \sigma_3 W^+ - \sigma_4 V^- = 0 \quad ,$$

$$\sigma_2 2Z - (\sigma_1+\sigma_3) M^+ = 0 \quad ,$$

$$\sigma_3 Z - \sigma_2 M^+ = 0 \quad ,$$

$$\sigma_4 2Z = 0 \quad . \tag{4.78}$$

Aus der letzten Gleichung ersehen wir, daß $\sigma_4 \equiv 0$ eine Lösung ist, und in diesem Fall können wir das Gleichungssystem nach σ_3 auflösen:

$$\sigma_2 = \sigma_3 Z M^{-1} \quad , \tag{4.79a}$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 2Z M^{-1} Z M^{-1} - \sigma_3 \tag{4.79b}$$

und

$$\sigma_3 2Z M^{-1} Z M^{-1} Z - \sigma_3 2Z - \sigma_3 Z M^{-1} V^+ - \sigma_3 W^+ = 0 \quad . \tag{4.79c}$$

Wir können M^{-1} und Z vertauschen und erhalten

$$\sigma_3 2M^{-2} Z^3 - \sigma_3 2Z - \sigma_3 M^{-1} Z V^+ - \sigma_3 W^+ = 0 \quad .$$

Diese Gleichung lautet in ausführlicher Form nach Division durch 2:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_3(\vec{k}, s_1', s_2')\ [M^{-2}(\vec{k})\ Z^3(\vec{k}) - Z(\vec{k})] \\
&-\frac{g}{4(m^-)^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\ \sigma_3(\vec{p}, s_1 s_2)\ N_{\vec{p}}^2\ N_{\vec{k}}^2\ M^{-1}(\vec{p})\ Z(\vec{p}) \\
&\cdot\Big\{F_1^+(\vec{p}^2)(E_{\vec{p}}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}}+m^+)^2}\big(2\,\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'}-\delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})-B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\delta_{s_2s_2'}\big) \\
&\qquad-\delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})-B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\delta_{s_2s_2'}+2\,B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})\Big] \\
&\quad+F_2^+(\vec{p}^2)\big(2\,\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'}-2\,B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})\big)\Big\} \\
&-\frac{g}{4(m^-)^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\ \sigma_3(\vec{p}, s_1 s_2)\ N_{\vec{p}}^2\ N_{\vec{k}}^2 \\
&\cdot\Big\{F_1^-(\vec{p}^2)(E_{\vec{p}}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}}+m^+)^2}\big(2\,\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'}-\delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})-B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\delta_{s_2s_2'}\big) \\
&\qquad-\delta_{s_1s_1'}B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})-B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\delta_{s_2s_2'}+2\,B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})\Big] \\
&\quad+F_2^+(\vec{p}^2)\big(2\,\delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'}-2\,B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})\big)\Big\} \\
&=0 \qquad (4.80)
\end{aligned}
$$

Wir stellen fest, daß σ_3 gerade eine Linkslösung der Integralgleichung (4.60) ist, die wir in Abschnitt 4.5 für die Rechtslösung φ_1 abgeleitet haben. Dies bedeutet, daß auch in der aufgelösten Form σ_3 und φ_1 noch Links- und Rechtslösungen derselben Gleichung sind.

4.7 Norm des Zustands TT

Wie bereits mehrfach betont, sollen die Massen m_{11} und m_{12} sehr groß sein, und für die Masse E eines beobachtbaren Bindungszustands muß deshalb

$$E << m_{11}, m_{12} \tag{4.81a}$$

und damit auch

$$E << m^+ \equiv m_1^+ = \frac{1}{2}(m_{11}+m_{12}) \tag{4.81b}$$

sein.

Es gilt also

$$\frac{E}{m^+} << 1 \quad , \tag{4.81c}$$

und wegen $E_{\vec{p}} \geq m^+$ folgt auch

$$\frac{E}{E_{\vec{p}}} << 1 \quad . \tag{4.81d}$$

Bei der Berechnung von Bindungszuständen werden wir deshalb die Terme

$$\frac{E}{m^+} \text{ und } \frac{E}{E_{\vec{p}}}$$

und natürlich Terme höherer Ordnung in erster Näherung gegenüber 1 vernachlässigen.

In dieser Näherung erhalten wir für den "freien Anteil" von Gleichung (4.60)

$$
\begin{aligned}
& M^{-2}(\vec{p})\; Z^{3}(\vec{p}) \;-\; Z(\vec{p}) \\
&= \frac{E_{\vec{p}}}{2\, m^{-}\, m^{+}} \;\left(E - 2\, E_{\vec{p}} \right)^{3} \;-\; \left(E - 2\, E_{\vec{p}} \right) \\
&= \frac{E_{\vec{p}}^{4}}{(m^{-})^{2}\,(m^{+})^{2}} \left(E - 2\, E_{\vec{p}} \right) \left\{ \frac{E^{2}}{4\, E_{\vec{p}}^{2}} - \frac{E}{E_{\vec{p}}} + 1 - \frac{(m^{-})^{2}\,(m^{+})^{2}}{E_{\vec{p}}^{4}} \right\} \\
&\approx \frac{E_{\vec{p}}^{4}}{(m^{-})^{2}\,(m^{+})^{2}} \left(E - 2\, E_{\vec{p}} \right) . \qquad (4.82)
\end{aligned}
$$

Beim letzten Term in den geschweiften Klammern { ... } haben wir berücksichtigt, daß wegen $E_{\vec{p}} \geq m^{+}$

$$
\frac{(m^{-})^{2}\,(m^{+})^{2}}{E_{\vec{p}}^{4}} \;<\; \frac{(m^{-})^{2}}{(m^{+})^{2}}
$$

ist, und mit $m^{-} \ll m^{+}$ gilt auch

$$
\frac{(m^{-})^{2}\,(m^{+})^{2}}{E_{\vec{p}}^{4}} \;\ll\; 1 \; .
$$

Auch der Wechselwirkungsanteil von Gleichung (4.60) enthält aufgrund der Funktion $Z(\vec{p})$ nach Umformung einen Term $\frac{E}{E_{\vec{p}}}$,

den wir gegenüber 1 vernachlässigen.
In dieser Approximation $\frac{E}{E_{\vec{p}}} \ll 1$ lautet Gleichung (4.60) ohne weitere Vernachlässigung

$$\frac{E_{\vec{p}}^{\,4}}{(m^-)^2\,(m^+)^2}\;\left(E - 2E_{\vec{p}}\right)\;\varphi_1(\vec{p}, s_1 s_2)$$

$$+\;\frac{g'}{4(m^-)^2}\;\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\;N_{\vec{p}}^2\;N_{\vec{k}}^2\;\left(-\frac{E_{\vec{p}}^{\,2}}{m^-\,m^+}\right)$$

$$\cdot\Big\{F_1^+(\vec{p}^{\,2})\,(E_{\vec{p}}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}^{\,2}}{(E_{\vec{p}}+m^+)^2}\left(2\,\delta_{s_1s_1'}\,\delta_{s_2s_2'} - \underline{\delta_{s_1s_1'}\,B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})} - \underline{B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2s_2'}}\right)$$

$$-\,\delta_{s_1s_1'}\,B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2s_2'} + \underline{2\,B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})}\Big]$$

$$+\,F_2^+(\vec{p}^{\,2})\left(2\,\delta_{s_1s_1'}\,\delta_{s_2s_2'} - \underline{2\,B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})}\right)\Big\}\;\varphi_1(\vec{k}, s_1' s_2')$$

$$+\;\frac{g'}{4(m^-)^2}\;\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\;N_{\vec{p}}^2\;N_{\vec{k}}^2$$

$$\cdot\Big\{F_1^-(\vec{p}^{\,2})\,(E_{\vec{p}}+m^+)\Big[\frac{\vec{p}^{\,2}}{(E_{\vec{p}}+m^+)^2}\left(2\,\delta_{s_1s_1'}\,\delta_{s_2s_2'} - \underline{\delta_{s_1s_1'}\,B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})} - \underline{B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2s_2'}}\right)$$

$$-\,\delta_{s_1s_1'}\,B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2s_2'} + \underline{2\,B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})}\Big]$$

$$+\,F_2^-(\vec{p}^{\,2})\left(2\,\delta_{s_1s_1'}\,\delta_{s_2s_2'} - \underline{2\,B_{s_1s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,B_{s_2s_2'}(\vec{p},\vec{k})}\right)\Big\}\;\varphi_1(\vec{k}, s_1' s_2')$$

$$= 0\,. \qquad (4.83a)$$

Aus technischen Gründen verwenden wir die Kopplungskonstante

$g' := -g$.

Für einen Bindungszustand wollen wir voraussetzen, daß die Wellenfunktion $\varphi_1(\vec{k})$ sehr stark um den Ursprung des Relativimpulses $\vec{k}$ konzentriert ist und für große $|\vec{k}|$ genügend schnell abfällt.
In diesem Fall können wir in Gleichung (4.83) die Funktion $B_{ss'}(\vec{p},\vec{k})$ (4.49) gegenüber $\delta_{ss'}$ und damit die unterstrichenen Terme gegenüber dem Rest vernachlässigen, denn es gilt:

a) Für kleine Relativimpulse $\vec{p}$ und $\vec{k}$, das heißt $|\vec{p}|, |\vec{k}| << m^+$ ist

$$|B_{ss'}(\vec{p},\vec{k})| << 1 \quad .$$

Dies bewirkt der "Energienenner" $\dfrac{1}{(E_{\vec{p}}+m^+)(E_{\vec{k}}+m^+)}$, den wir für kleine Impulse durch $\dfrac{1}{4(m^+)^2}$ ersetzen können.

b) Bei fester Orientierung der Impulse $\vec{p}$ und $\vec{k}$ gilt im wesentlichen

$$|B(\vec{k},\vec{p})| \propto \frac{|\vec{p}|\cdot|\vec{k}|}{(E_{\vec{p}}+m^+)(E_{\vec{k}}+m^+)} \quad .$$

Für kleine Impulse zeigt B folglich das lineare Verhalten

$$|B(\vec{k},\vec{p})| \propto \frac{|\vec{p}|\,|\vec{k}|}{4(m^+)^2} \quad ,$$

welches bei beliebiger Orientierung durch das Skalar- und Vektorprodukt abgeschwächt wird.
Für große Impulse ist $B(\vec{k},\vec{p})$ beschränkt.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß wenn die Wellenfunktion ihr Maximum erreicht, dieses Maximum durch die Funktion B abgeschwächt und sogar zu Null gemacht wird, und für große Impulse sollte das Abfallen der Wellenfunktion für verschwindende Beiträge sorgen.

Wir erhalten damit aus (4.83a)

$$\frac{E_{\vec{p}}^{4}}{(m^-)^2\,(m^+)^2}\;(E - 2E_{\vec{p}})\;\varphi_1(\vec{p}, s_1 s_2)$$

$$- \frac{g'}{4(m^-)^2}\;\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\; N_{\vec{p}}^2\; N_{\vec{k}}^2\;\frac{E_{\vec{p}}^2}{m^- m^+}$$

$$\cdot\Big\{F_1^+(\vec{p}^2)\,(E_{\vec{p}} + m^+)\Big[\frac{2\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}} + m^+)^2}\,\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2 s_2'}\Big]$$

$$+ F_2^+(\vec{p}^2)\;2\,\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'}\Big\}\;\varphi_1(\vec{k}, s_1' s_2')$$

$$- \frac{g'}{4(m^-)^2}\;\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\; N_{\vec{p}}^2\; N_{\vec{k}}^2$$

$$\cdot\Big\{F_1^-(\vec{p}^2)\,(E_{\vec{p}} + m^+)\Big[\frac{2\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}} + m^+)^2}\,\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'}\,B_{s_2 s_2'}(\vec{p},\vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p},\vec{k})\,\delta_{s_2 s_2'}\Big]$$

$$+ F_2^-(\vec{p}^2)\;2\,\delta_{s_1 s_1'}\,\delta_{s_2 s_2'}\Big\}\;\varphi_1(\vec{k}, s_1' s_2')$$

$$= 0\,. \qquad (4.83b)$$

Die in dieser Gleichung noch enthaltenen Beiträge der Funktion $B_{ss'}(\vec{p},\vec{k})$ zeigen in Bezug auf den Energienenner dasselbe Verhalten wie der Term

$$\frac{2\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}} + m^+)^2}\;\delta_{s_1 s_1'}\;\delta_{s_2 s_2'}\,,$$

so daß hier nur die (schwächere) Argumentation b) anwendbar ist. Trotzdem wollen wir in erster Näherung sämtliche richtungs- und spinabhängigen Anteile vernachlässigen, und nach anschließender Multiplikation mit $(m^-)^2(m^+)^2$ erhalten wir aus (4.83b)

$$
\begin{aligned}
& E_{\vec{p}}^{\,4}\,(2E_{\vec{p}} - E)\;\varphi_1(\vec{p}, s_1, s_2) \\
& + \frac{1}{2}\, g'\, (m^+)^2\, \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\; N_{\vec{p}}^2\, N_{\vec{k}}^2 \\
& \cdot \left\{ \frac{\vec{p}^{\,2}}{E_{\vec{p}} + m^+} \left[\frac{E_{\vec{p}}^{\,2}}{m^+}\, \frac{F_1^+(\vec{p}^{\,2})}{m^-} - F_1^-(\vec{p}^{\,2}) \right] \right. \\
& \left. + \frac{E_{\vec{p}}^{\,2}}{m^+}\, \frac{F_2^+(\vec{p}^{\,2})}{m^-} - F_2^-(\vec{p}^{\,2}) \right\} \varphi_1(\vec{k}, s_1, s_2) \\
& = 0 \,. \qquad (4.84)
\end{aligned}
$$

In dieser Näherung ist der Integralkern und somit auch die Funktion φ_1 nur vom Betrag der Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{k}$ abhängig. Ohne die Gefahr von Mißverständnissen verwenden wir im folgenden die zuvor für den Vierimpuls reservierte Bezeichnung p für den Betrag $|\vec{p}|$ und entsprechend $k=|\vec{k}|$.

Wir definieren die Funktionen

$$
\begin{aligned}
h_1(p) &:= E_p^{\,4}\,(2E_p - E) \,, \\
N(p) &:= N_p = \left(\frac{E_p + m^+}{2E_p} \right)^{1/2} \,,
\end{aligned}
$$

$$h_2(p) := (E_p - m^+)\left[-\frac{E_p^2}{m^+}\cdot\frac{F_1^+(p)}{m^-} + F_1^-(p)\right]$$

$$-\frac{E_p^2}{m^+}\cdot\frac{F_2^+(p)}{m^-} + F_2^-(p) \qquad (4.85)$$

und können damit Gleichung (4.84) in der übersichtlichen Form

$$h_1(p)\,\varphi_1(p,s_1s_2) = \frac{1}{2}\,g'\,(m^+)^2\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\;N^2(p)\,N^2(k)\,h_2(p)\,\varphi_1(k,s_1s_2) \qquad (4.86a)$$

schreiben.

Die Überlegungen, die zur Vernachlässigung der richtungs- und spinabhängigen Terme führten, gelten gleichermaßen für die Linkslösung (4.80), und damit ist $\sigma_3(k)$ eine Linkslösung von Gleichung (4.86a):

$$\sigma_3(k,s_1s_2)\,h_1(k) = \frac{1}{2}\,g'\,(m^+)^2\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\;\sigma_3(p,s_1s_2)\,N^2(p)\,N^2(k)\,h_2(p) \qquad (4.86b)$$

Mit

$$\hat{\varphi}_1(p,s_1s_2) := \sqrt{\frac{h_1(p)}{h_2(p)}}\;\varphi_1(p,s_1s_2) \qquad (4.87a)$$

folgt aus (4.86a)

$$\hat{\varphi}_1(p,s_1s_2) = \frac{1}{2}\,g'\,(m^+)^2\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int dk\;N^2(p)\,N^2(k)\left(\frac{h_2(p)\,h_2(k)}{h_1(p)\,h_1(k)}\right)^{1/2}\hat{\varphi}_1(k,s_1s_2), \qquad (4.88a)$$

und entsprechend erhalten wir mit

$$\hat{\sigma}_3(k,s_1s_2) := \sqrt{h_1(k)\,h_2(k)}\;\sigma_3(k,s_1s_2) \qquad (4.87b)$$

aus (4.86b)

$$\hat{\sigma}_3(k,s_1s_2) = \frac{1}{2}\, g'\,(m^+)^2\, \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\rho\; \hat{\sigma}_3(\rho,s_1s_2)\; N^2(\rho)\, N^2(k) \left(\frac{h_2(\rho)\, h_2(k)}{h_1(\rho)\, h_1(k)}\right)^{\frac{1}{2}} . \qquad (4.88b)$$

Die Funktionen $\hat{\sigma}_3$ und $\hat{\varphi}_1$ sind Links- und Rechtslösungen einer homogenen Integralgleichung mit einem hermiteschen Kern, und daraus folgt <30>

$$\hat{\sigma}_3^*(k,s_1s_2) \equiv \hat{\varphi}_1(k,s_1s_2) \quad . \qquad (4.89)$$

An dieser Stelle haben wir in Form eines Postulats auf die gewöhnliche Quantenmechanik zurückgegriffen, da die Gleichungen (4.88a,b) keine Entscheidung über einen Phasenfaktor erlauben.
Der Kern ist in dieser Form reellwertig symmetrisch, und mit (4.87a,b) erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \sigma_3(k,s_1s_2) &= \frac{1}{\sqrt{h_1(k)\; h_2(k)}}\; \hat{\varphi}_1(k,s_1s_2) \\ &= \frac{1}{h_2(k)}\; \varphi_1(k,s_1s_2) \; . \end{aligned} \qquad (4.90)$$

Wir können mit der Definition

$$C(s_1,s_2) := \frac{1}{2}\, g'\,(m^+)^2\, \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\; N^2(k)\; \varphi_1(k,s_1s_2) \qquad (4.91)$$

sofort die beiden Lösungen

$$\varphi_1(p,s_1s_2) = C(s_1,s_2)\, \frac{N^2(p)\, h_2(p)}{h_1(p)} \qquad (4.92a)$$

und

$$\sigma_3(p,s_1s_2) = C(s_1,s_2)\, \frac{N^2(p)}{h_1(p)} \qquad (4.92b)$$

angeben, da der Kern in Gleichung (4.86a) beziehungsweise

(4.86b) vollständig ausgeartet (separiert) ist.
Indem wir die beiden Lösungen (4.92a,b) wieder in (4.86a,b) einsetzen, erhalten wir eine Beziehung zwischen der Kopplungskonstanten g' und dem Energieeigenwert E, und man kann damit nachweisen, daß die vorliegende homogene Integralgleichung tatsächlich stetige Lösungen $\neq 0$ zuläßt. Im nächsten Abschnitt werden wir hierauf zurückkommen, um -je nach Problemstellung- die Masse eines Bindungszustands zu berechnen oder bei bekannter Masse die Kopplungskonstante anzupassen.

Für die Konstante C folgt aus (4.91)

$$C(s_1,s_2) = -C(s_2,s_1) \quad . \tag{4.93}$$

Insbesondere gilt also für $s_1=s_2$

$$\varphi_1(p,s_1s_2) = \sigma_3(p,s_1s_2) = 0 \quad , \tag{4.94a}$$

und da φ_1 und σ_3 in der betrachteten Näherung nur vom Betrag $p=|\vec{p}|$ abhängig sind, finden wir

$$\varphi_1(p,s_1s_2) = -\varphi_1(p,s_2s_1) \tag{4.94b}$$

und

$$\sigma_3(p,s_1s_2) = -\sigma_3(p,s_2s_1) \quad . \tag{4.94c}$$

In ausführlicher Form lauten die Lösungen

$$\varphi_1(p,s_1s_2) = C(s_1,s_2)\,\frac{E_p+m^+}{2E_p}\,\frac{1}{E_p^4(2E_p-E)} \cdot \left\{(E_p-m^+)\left[-\frac{E_p^2}{m^+}\frac{F_1^+(p)}{m^-}+F_1^-(p)\right]-\frac{E_p^2}{m^+}\frac{F_2^+(p)}{m^-}+F_2^-(p)\right\} \tag{4.95a}$$

und

$$\sigma_3(p,s_1s_2) = C(s_1,s_2)\,\frac{E_p+m^+}{2E_p}\,\frac{1}{E_p^4(2E_p-E)} \quad . \tag{4.95b}$$

Diese Gleichungen gelten für einen Bindungszustand mit $E<<m^+\leq E_p$, und aus diesem Grund weisen φ_1 und σ_3 keine Singularitäten auf.
Um die Norm des Zustands TT zu berechnen, erinnern wir uns, daß wir in Abschnitt 2.6 gezeigt haben, wie die Norm eines Energieeigenzustandes |a> als Produkt der Links- und Rechtslösungen σ und φ der (renormierten) Energiegleichung im Zustandsraum geschrieben werden kann. Die Bestimmungsgleichungen für σ und φ wurden mit Hilfe des Funktionalformalismus abgeleitet, und für den Zustand $|a>=|TT>$ gilt mit (3.48)

$$<a|a> = \sum_{i\alpha}\int \sigma(\vec{x}_1, i_1\alpha_1, \vec{x}_2, i_2\alpha_2|a)\,\varphi(\vec{x}_1, i_1\alpha_1, \vec{x}_2, i_2\alpha_2|a)\,d\vec{x}_1\,d\vec{x}_2 . \quad (4.96)$$

Berücksichtigen wir die verschiedenen Transformationen, welche wir bei unseren Rechnungen durchgeführt haben, so rechnet man leicht nach, daß in allgemeiner Form die folgende Kette von Gleichungen gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{I_1I_2} \sigma(I_1,I_2\,a)\,\varphi(I_1,I_2\,a) \\
&= \sum_{I_1I_2}\sum_{I_1'I_2'I_1''I_2''} \sigma'(I_1',I_2'|a)\,U_{I_1'I_1}\,U_{I_2'I_2}\,U_{I_1I_1''}\,U_{I_2I_2''}\,\varphi'(I_1'',I_2''|a) \\
&= \sum_{I_1I_2} \sigma'(I_1,I_2|a)\,\varphi'(I_1,I_2|a) \\
&= \sum_{b_1b_2} \Big\{ \sigma(\overset{s}{b_1},\overset{s}{b_2})\,\varphi(\overset{s}{b_1},\overset{s}{b_2}) + \sigma(\overset{s}{b_1},\overset{x}{b_2})\,\varphi(\overset{s}{b_1},\overset{x}{b_2}) \\
&\qquad + \sigma(\overset{x}{b_1},\overset{s}{b_2})\,\varphi(\overset{x}{b_1},\overset{s}{b_2}) + \sigma(\overset{x}{b_1},\overset{x}{b_2})\,\varphi(\overset{x}{b_1},\overset{x}{b_2})\Big\} \\
&= \sum_{b_1b_2} \Big\{ \sigma_1(b_1,b_2)\,\varphi_1(b_1,b_2) + 2\,\sigma_2(b_1,b_2)\,\varphi_2(b_1,b_2) \\
&\qquad + \sigma_3(b_1,b_2)\,\varphi_3(b_1,b_2) + 2\,\sigma_4(b_1,b_2)\,\varphi_4(b_1,b_2)\Big\}
\end{aligned} \quad (4.97)$$

Zur Erinnerung: bei b_1 und b_2 handelt es sich um die in (4.24) definierten Vielfachindizes $b \equiv B, \Gamma, \beta, y$.

Für den Zustand TT haben wir in Abschnitt 4.4 eine Entwicklung nach Diracspinoren durchgeführt. Mit Hilfe der Formeln (4.45) und (4.72) folgt für $i=1,\ldots,4$

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2} \int \sigma_i \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \right)_{\alpha_1 \alpha_2} \varphi_i \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \right)_{\alpha_1 \alpha_2} d\vec{x}_1 \, d\vec{x}_2$$

$$= (2\pi)^6 \sum_{s_1 s_2} \int \tilde{\sigma}_i \left(\vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2 \right) \tilde{\varphi}_i \left(\vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2 \right) d\vec{p}_1 \, d\vec{p}_2 \,, \qquad (4.98)$$

und nach Übergang zu Schwerpunkt- und Relativkoordinaten (siehe (4.51) und (4.74)) können wir weiter schreiben

$$= (2\pi)^6 \, \delta(\vec{P}-\vec{K}) \sum_{s_1 s_2} \int \hat{\tilde{\sigma}}_i \left(\vec{p}_r, s_1 s_2 \,|\, \vec{P} \right) \hat{\tilde{\varphi}}_i \left(\vec{p}_r, s_1 s_2 \,|\, \vec{K} \right) d\vec{p}_r \,. \qquad (4.99)$$

Für $\vec{P}=\vec{K}=0$ lautet damit der Ausdruck für die Norm

$$\langle a \,|\, a \rangle = (2\pi)^6 \, \delta(0) \sum_{s_1 s_2} \int \Big\{ \sigma_1 \left(\vec{p}, s_1 s_2 \right) \varphi_1 \left(\vec{p}, s_1 s_2 \right)$$

$$+ 2 \, \sigma_2 \left(\vec{p}, s_1 s_2 \right) \varphi_2 \left(\vec{p}, s_1 s_2 \right) + \sigma_3 \left(\vec{p}, s_1 s_2 \right) \varphi_3 \left(\vec{p}, s_1 s_2 \right) \Big\} d\vec{p} \,. \qquad (4.100)$$

Hierbei haben wir verwendet, daß $\sigma_4 \equiv 0$ eine Lösung von $Z\sigma_4 = 0$ ist. Der Faktor $\delta(0)$ rührt von der Entwicklung nach ebenen Wellen und dem Übergang zum Schwerpunktsystem. Durch geeignete Normierung kann dieser Faktor beseitigt werden.
Mit den "Auflösungsformeln" (4.59) und (4.79) können wir den Integranden umformen

$$\sigma_1 \varphi_1 + 2 \, \sigma_2 \varphi_2 + \sigma_3 \varphi_3$$

$$= \sigma_3 \left\{ 6 \, M^{-2} Z^2 - 2 - M^{-1} V^4 \right\} \varphi_1 \,, \qquad (4.101)$$

und unter Verwendung der Definition (4.55) und (4.58) erhalten wir das Ergebnis

$$
\begin{aligned}
&\langle a|a\rangle \\
&= (2\pi)^6 \delta(0) \sum_{s_1 s_2} \int \sigma_3(\vec{p}, s_1 s_2) \left\{ 6 \left(\frac{E_{\vec{p}}}{2m^2 - m'^2} \right)^2 (E - 2E_{\vec{p}}) - 2 \right\} \varphi_1(\vec{p}, s_1 s_2) \, d\vec{p} \\
&+ (2\pi)^6 \delta(0) \frac{g'}{2(m^2)^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\substack{s_1 s_2 \\ s_1' s_2'}} \int \sigma_3(\vec{p}, s_1 s_2) \frac{E_{\vec{p}}}{2m^2 - m'^2} N_{\vec{p}}^2 N_{\vec{k}}^2 \\
&\cdot \left\{ F_1^+(\vec{p}^2)(E_{\vec{p}} + m') \left[\frac{\vec{p}^2}{(E_{\vec{p}} + m')^2} \left(2 \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'} B_{s_2 s_2'}(\vec{p}, \vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}, \vec{k}) \delta_{s_2 s_2'} \right) \right. \right. \\
&\quad - \delta_{s_1 s_1'} B_{s_2 s_2'}(\vec{p}, \vec{k}) - B_{s_1 s_1'}(\vec{p}, \vec{k}) \delta_{s_2 s_2'} + 2 B_{s_1 s_1'}(\vec{p}, \vec{k}) B_{s_2 s_2'}(\vec{p}, \vec{k}) \Big] \\
&\quad \left. + F_2^+(\vec{p}^2) \left[2 \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} - 2 B_{s_1 s_1'}(\vec{p}, \vec{k}) B_{s_2 s_2'}(\vec{p}, \vec{k}) \right] \right\} \varphi_1(\vec{k}, s_1' s_2') \, d\vec{k} \, d\vec{p} .
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

Machen wir dieselben Näherungen wie zu Beginn dieses Abschnitts, so folgt nach Vernachlässigung der Terme, welche die Funktion B enthalten,

$$
\begin{aligned}
&\langle a|a\rangle \\
&= (2\pi)^6 \delta(0) \sum_{s_1 s_2} \int \sigma_3(\vec{p}, s_1 s_2) \left\{ 6 \left(\frac{E_{\vec{p}}}{2m^2 - m'^2} \right)^2 (E - E_{\vec{p}})^2 - 2 \right\} \varphi_1(\vec{p}, s_1 s_2) \, d\vec{p} \\
&+ (2\pi)^3 \delta(0) \frac{g'}{2(m^2)^2} \sum_{s_1 s_2} \int \sigma_3(\vec{p}, s_1 s_2) \frac{E_{\vec{p}}}{m'^2} N_{\vec{p}}^2 N_{\vec{k}}^2 \left\{ (E_{\vec{p}} - m') \frac{F_1^+(\vec{p}^2)}{m^2} + \frac{F_2^+(\vec{p}^2)}{m^2} \right\} \varphi_1(\vec{k}, s_1 s_2) \, d\vec{k} \, d\vec{p} .
\end{aligned}
\tag{4.103}
$$

Wir setzen die Formeln (4.75a,b) für φ_1 und σ_3 ein und beachten, daß Summation über die Spinindizes wegen (4.93) gerade den Faktor 2 ergibt. Damit finden wir

$$\langle a|a\rangle$$

$$= \delta(0)\,(2\pi)^6\,2C^2\int\left\{\frac{3}{8}\,\frac{(E_p+m^+)^2}{E_p^8\,(m^-)^2\,(m^+)^2}-\frac{(E_p+m^+)^2}{8\,E_p^{12}}\right\}$$

$$\cdot\left\{(E_p-m^+)\left[F_1^-(p)-\frac{E_p^2}{m^+}\cdot\frac{F_1^+(p)}{m^-}\right]+F_2^-(p)-\frac{E_p^2}{m^+}\cdot\frac{F_2^+(p)}{m^-}\right\}d\vec{p}$$

$$+\delta(0)\,(2\pi)^3\,\frac{\delta^1}{(m^-)^2}\,C^2\int\frac{(E_p+m^+)^2}{8\,E_p^6\,m^+}\left\{(E_p-m^+)\,\frac{F_1^+(p)}{m^-}+\frac{F_2^+(p)}{m^-}\right\}$$

$$\cdot\,\frac{(E_k+m^+)^2}{6\,E_k^7}\left\{(E_k-m^+)\,F_1^-(k)-\frac{E_k^2}{m^+}\,\frac{F_1^+(k)}{m^-}+F_2^-(k)-\frac{E_k^2}{m^+}\,\frac{F_2^+(k)}{m^-}\right\}d\vec{k}\,d\vec{p}\;. \tag{4.104}$$

Zur weiteren Auswertung dieser Integrale wollen wir den Spezialfall $m_{11}\approx m_{12}$, das heißt $m^-\ll 1$, betrachten.
Da

$$F_1^+(p)\big|_{m^-=0}=F_2^+(p)\big|_{m^-=0}=0$$

gilt, berechnen wir die Grenzwerte

$$\lim_{m^-\to 0}\frac{F_1^+(p)}{m^-}=-\frac{2\,m^+}{E_p^3} \tag{4.105a}$$

und

$$\lim_{m^-\to 0}\frac{F_2^+(p)}{m^-}=\frac{2}{E_p}-\frac{2\,(m^+)^2}{E_p^3}\;. \tag{4.105b}$$

Weiterhin gilt

$$F_1^-(p)\big|_{m^-=0}=\frac{2}{E_p} \tag{4.105c}$$

und

$$F_2^-(p)\big|_{m^-=0}=\frac{2m^+}{E_p}\;. \tag{4.105d}$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich die Integrale in (4.104) nach Einführung von Kugelkoordinaten und unter Verwendung einer Formelsammlung <59> leicht berechnen.
Wir finden als Ergebnis für die Norm des Zustands TT

$$
\begin{aligned}
&\langle a|a\rangle \\
&= \delta(0)(2\pi)^3\, 2\,\frac{C^2}{(m^+)^5}\left\{(2\pi)^3\,\frac{4}{(m^-)^2}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi^2}{16}\right)\right. \\
&\quad \left. -(2\pi)^3\,\frac{2}{(m^+)^2}\left(\frac{8\pi}{105}+\frac{7\pi^2}{256}\right)+\frac{g'}{(m^-)^2}\left(\frac{4\pi^2}{75}-\frac{\pi^3}{240}-\frac{\pi^4}{512}\right)\right\} \\
&= \delta(0)(2\pi)^3\,\frac{2C^2}{(m^+)^5}\left\{\frac{1223{,}8}{(m^-)^2}-\frac{256{,}6}{(m^+)^2}+\frac{g'}{(m^-)^2}\cdot 0{,}21\right\}. \qquad (4.106)
\end{aligned}
$$

Wegen $m^- << m^+$ liefern in (4.106) die beiden Terme mit positivem Vorzeichen den entscheidenden Beitrag. Wir sehen, daß für eine positive Kopplungskonstante $g'>0$ die Norm stets positiv ist, und dies trifft selbst für $g'<0$ in einem großen Bereich zu. Zur Anpassung der Kopplungskonstanten berechnen wir im letzten Abschnitt dieser Arbeit den Zusammenhang zwischen g' und der Masse des Zustands TT.

4.8 Energieeigenwert des Zustands TT

Im Rahmen der bisher durchgeführten Näherungen wollen wir den Energieeigenwert, das heißt im vorliegenden Fall die Masse des Zustands TT bestimmen. Insbesondere müssen wir nachprüfen, ob wir die Kopplungskonstante g' so festlegen können, daß $E<<m^+$ gilt. Zu diesem Zweck kehren wir zur Gleichung (4.84) zurück. Wir dividieren zunächst durch

$$E_p^4(2E_p-E) \quad ,$$

und mit der Entwicklung

$$\frac{1}{1-\frac{E}{2E_p}} = 1 + \frac{E}{2E_p} + \cdots$$

erhalten wir die homogene Integralgleichung

$$\varphi_1(p, s_1 s_2)$$

$$= -\frac{1}{2} g' (m^+)^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\; N^2(k)\; N^2(p)\; \frac{1}{2E_p^s} \left(1 + \frac{E}{2E_p}\right)$$

$$\cdot \left\{ \frac{p^2}{E_p + m^+} \left[\frac{E_p^2}{m^+} \frac{F_1^+(p)}{m^-} - F_1^-(p) \right] + \frac{E_p^2}{m^+} \frac{F_2^+(p)}{m^-} - F_2^-(p) \right\} \varphi_1(k, s_1 s_2) \,. \quad (4.107)$$

Da der Kern in (4.107) vollständig separiert ist, können wir sofort den Lösungsansatz

$$\varphi_1(p, s_1 s_2)$$

$$= -C(s_1, s_2)\; N^2(p)\; \frac{1}{2E_p^s} \left(1 + \frac{E}{2E_p}\right)$$

$$\cdot \left\{ \frac{p^2}{E_p + m^+} \left[\frac{E_p^2}{m^+} \frac{F_1^+(p)}{m^-} - F_1^-(p) \right] + \frac{E_p^2}{m^+} \frac{F_2^+(p)}{m^-} - F_2^-(p) \right\} \quad (4.108)$$

angeben mit der Konstanten $C(s_1, s_2)$ aus (4.91):

$$C(s_1, s_2) = \frac{1}{2} g' (m^+)^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\; N^2(k)\; \varphi_1(k, s_1, s_2) \quad (4.91)$$

Indem wir den Ansatz (4.108) in Gleichung (4.107) oder in (4.91) einsetzen, werden wir zu der Bedingung

$$1 + \frac{1}{2} g' (m^+)^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\; N^4(k)\; \frac{1}{2E_k^s} \left(1 + \frac{E}{2E_k}\right)$$

$$\cdot \left\{ \frac{k^2}{E_k + m^+} \left[\frac{E_k^2}{m^+} \frac{F_1^+(k)}{m^-} - F_1^-(k) \right] + \frac{E_k^2}{m^+} \frac{F_2^+(k)}{m^-} - F_2^-(k) \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.109)$$

geführt. Nur wenn diese Bedingung erfüllt werden kann, ist (4.108) eine Lösung der Integralgleichung (4.107).
Aus (4.109) erhalten wir

$$1 + g' \int I(k)\, d\vec{k} \quad + \quad g' E \int \frac{I(k)}{2 E_k}\, d\vec{k} \quad \stackrel{!}{=} \quad 0 \tag{4.110}$$

und damit

$$E = \frac{-1 - g' \int I(k)\, d\vec{k}}{g' \int \frac{I(k)}{2 E_k}\, d\vec{k}} \quad , \tag{4.111}$$

wobei wir mit I(k) den Integranden

$$I(k) := \frac{1}{2} (m^+)^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{N^4(k)}{2 E_k^5} \left\{ \frac{k^2}{E_k + m^+} \left[\frac{E_k^2}{m^+} \frac{F_1^+(k^2)}{m^-} - F_1^-(k^2) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{E_k^2}{m^+} \frac{F_2^+(k^2)}{m^-} - F_2^-(k^2) \right\} \tag{4.112}$$

bezeichnet haben.
Die Bedingung (4.109) liefert uns somit den gesuchten Zusammenhang zwischen der Kopplungskonstanten g' und dem Eigenwer E. Auch hier betrachten wir den Spezialfall $m_{11} \approx m_{12}$, und verwenden die Formeln (4.105a-d) für die Funktionen $F^-_{1/2}$ und $\frac{F^+_{1/2}(k)}{m^-}$. In diesem Fall lautet der Integrand

$$I(k) = \frac{1}{2} (m^+)^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{(E_k + m^+)^2}{4 E_k^7} \left\{ \frac{E_k}{m^+} - 4 \right\} , \tag{4.113}$$

und analog zu (4.104) lassen sich die Integrale in (4.11) nach Einführung von Kugelkoordinaten leicht berechnen; teilweise kommen dieselben Terme vor.
Als Ergebnis erhalten wir

$$E = m^+ 32 \pi^2 \frac{1 - \frac{g'}{60\pi^2}}{g' \left\{ \frac{1}{15} + \frac{\pi}{8} \right\}} \quad . \tag{4.114}$$

Diese Gleichung für E zeigt, daß es möglich ist, durch geeignete Wahl der Kopplungskonstanten g' einen Eigenwert $E<<m^+$ zu erhalten. Wir illustrieren dies in einer kurzen Tabelle:

g'	$E[m^+]$
545,2162047	10^{-1}
592,1711636	10^{-5}
592,176264	10^{-10}

Tabelle: Energieeigenwert E in Einheiten von m^+ als Funktion der Kopplungskonstanten g'

Bei der Herleitung von (4.114) wurden bereits Terme der Ordnung $\frac{E}{E_p}$ vernachlässigt. Die Rechnungen wurden auch durchgeführt unter Berücksichtigung dieser Terme erster Ordnung, und in diesem Fall lautet das Ergebnis

$$E = m^+ 32\pi^2 \frac{1 - \frac{g'}{60\pi^2}}{g'\left\{0{,}4 + \frac{3\pi}{8}\right\}} \quad . \tag{4.115}$$

Hieraus resultieren Werte, die mit den bisherigen Rechnungen verträglich sind:

g'	$E[m^+]$
456,9637751	10^{-1}
592,1587425	10^{-5}
592,1762639	10^{-10}

Die Diskrepanz der beiden Werte von g' für $E=10^{-1}m^+$ ist von geringer Bedeutung, da die Rechnungen nur für $E<<m^+$ Aussagekraft haben.

Bemerkenswert ist, daß für eine sehr hohe Masse m^+ die Kopplungskonstante extrem fein justiert werden muß, um die Masse eines beobachtbaren Teilchens zu erhalten. Wir wollen festhalten, daß nach (4.106) die Norm in diesem Bereich auf jeden Fall positiv ist. Kritischer als die Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\frac{E}{m^+}$ ist die Vernachlässigung von richtungs- und spinabhängigen Termen. Die Hauptargumente hierfür waren, daß

1. für kleine Impulse Terme der Gestalt $\frac{\vec{p}\vec{k}}{(E_{\vec{p}}+m^+)(E_{\vec{k}}+m^+)}$ aufgrund der sehr hohen Masse m^+ gegenüber 1 zu vernachlässigen sind,

und daß

2. die Wellenfunktionen für große Impulse genügend stark abfallen sollten.

Die Lösungen (4.91) zeigen nun, daß die Wellenfunktionen einen späteren Abfall aufweisen, wenn die Masse m^+ vergrößert wird. Es liegt also eine Art "Plateau" vor, dessen Breite durch die Masse m^+ bestimmt wird.
Berechnet man die Masse des Zustands $T\bar{T}$ mit den Näherungen, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet wurden, so folgt hieraus dasselbe Ergebnis wie für den Zustand TT. Die Rechnungen von HORNUNG <54> für den Zustand $T\bar{T}$ unter Berücksichtigung von Spin- und Richtungstermen sollten deshalb eine Aussage über die Gültigkeit der von uns verwendeten Näherungen gestatten.

5. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Eine mögliche und zudem strukturell einfache Erklärung für die große Anzahl der heute bekannten Elementarteilchen liefern physikalische Modelle, welche den bisher als punktförmig angesehenen Teilchen eine Substruktur zuweisen. Zu diesen Modellen gehören einheitliche nichtlineare Spinorfeldmodelle, in denen alle beobachtbaren Teilchen als Bindungszustände elementarer Fermionenfelder betrachtet werden. Die fundamentalen Felder, die auch als Preonenfelder bezeichnet werden, sind in dem vorliegenden Modell infolge extrem hoher Massen und indefiniter Metrik vollkommen unbeobachtbar.

In einer ausführlichen Darstellung der Grundlagen zeigten wir, wie ausgehend von der Fundamentalgleichung erster Ordnung für ein achtkomponentiges Spinorfeld (Diracspinor und Isospinor) mit skalarer Vierfermionen-Wechselwirkung ein renormierbares Gleichungssystem abgeleitet werden kann. Hiermit verknüpft ist eine Verdopplung der Komponenten der Felder beziehungsweise der Feldoperatoren und das Auftreten von Zuständen mit negativer Norm. Wie in der Quantenmechanik kann die Norm als Produkt von Links- und Rechtslösungen der (renormierten) Energiegleichung geschrieben werden. Diese Gleichung enthält nichthermitesche Operatoren.

Im Rahmen der funktionalen Quantentheorie definierten wir relativistische Bindungszustände als Lösungen des Diagonalanteils der Energiegleichung, und die Darstellung der Norm als Produkt von Links- und Rechtslösungen ist auch im Funktionalraum möglich.
Die konkreten Rechnungen wurden für den Zweiteilchen-Bindungszustand TT durchgeführt. Dabei sollte sich der Leser nicht daran stören, daß der Zustand TT ein Boson mit der Ladung $+\frac{2}{3}e$ beschreibt, denn die Rechnungen gelten in der vorliegenden Form auch für den ungeladenen Zustand VV. Die entscheidenden Schritte waren die unitäre Transformation der Operatoren j_I und ∂_I beziehungsweise der Funktionen σ und φ, der Übergang zur "ein-

zeitigen Theorie" mit $x_1^0 = x_2^0 = 0$ und die Entwicklung der Wellenfunktionen nach Lösungen der freien Diracgleichung. Im Schwerpunktsystem fanden wir unter Vernachlässigung von Richtungs- und Spintermen als Ergebnis eine hermitesche Integralgleichung für die Funktionen $\hat{\sigma}_3$ und $\hat{\varphi}_1$ und eine positive Norm für den Zustand TT. Darüberhinaus konnten wir zeigen, daß dieser Zustand bei endlicher Kopplungskonstante eine realistische, das heißt im Vergleich zu den hohen Preonenmassen kleine Masse besitzt.

Der Übergang zur einzeitigen Theorie bedeutet keine Einschränkung. So können wir für einen Zustand der Masse $m \neq 0$ die Rechnungen stets im Schwerpunktsystem mit dem Gesamtimpuls $\vec{P}=0$ durchführen und als Standardimpulsvektor $p^\mu = (m, \vec{0})$ wählen. Die zugehörige Kleine Gruppe ist die universelle Überlagerungsgruppe SU(2) der dreidimensionalen Drehgruppe, und in diesem Fall kann man mit dem Schrödingerbild arbeiten, ohne die Lorentzkovarianz zu gefährden <60,61>. Mittels eines Boost können wir vom Standardimpuls zu anderen Impulsen übergehen. Das Theorem, daß zwischen den einzeitigen Lösungen der Energiedarstellung und den mehrzeitigen Amplituden eine bijektive Beziehung besteht, wurde von STUMPF in <31> aufgestellt und in <50> für einen Zweiteilchen-Bindungszustand bewiesen. Die einzeitigen Zweiteilchen-Lösungen können folglich in den mehrzeitigen Bereich fortgesetzt werden, und diese mehrzeitigen Funktionen sind Lösungen der relativistisch invarianten, funktionalen Cluster-Gleichung.
In der letztgenannten Arbeit <50> wurden nach Anwendung verschiedener Näherungsverfahren für die Fälle $\vec{P} \to \infty$ und $\vec{P} \to 0$, wo $\vec{P}$ der Schwerpunktimpuls ist, die folgenden Proportionalitätsrelationen zwischen den Rechtslösungen φ_1, φ_2 und φ_3 beziehungsweise den Linkslösungen σ_1, σ_2 und σ_3 abgeleitet:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\tfrac{1}{2}\eta\varphi_1 \quad , \\ \varphi_3 &= 2(\tfrac{1}{2}\eta)^2\varphi_1 \quad , \\ \sigma_2 &= -\tfrac{1}{2}\eta\sigma_3 \quad , \\ \sigma_1 &= 2(\tfrac{1}{2}\eta)^2\sigma_3 \end{aligned} \qquad \text{für } \vec{P} \longrightarrow \infty \qquad (5.1)$$

und

$$\varphi_2 = -\eta\varphi_1 \quad ,$$
$$\varphi_3 = 2\eta^2\varphi_1 \quad ,$$
$$\sigma_2 = -\eta\sigma_3 \quad , \qquad \text{für } \vec{P} \longrightarrow 0 \tag{5.2}$$
$$\sigma_1 = 2\eta^2\sigma_3$$

mit

$$\eta := \frac{m^+}{m^-} \tag{5.3}$$

In der vorliegenden Arbeit wurde der Fall $\vec{P}=0$ untersucht, und mit Hilfe der Formeln (4.59) und (4.79) können wir im Rahmen der von uns verwendeten Näherungen die Gleichungen (5.2) bestätigen. Dies gilt für kleine Relativimpulse $\vec{p}_r$, das heißt für stark um den Ursprung $\vec{p}_r=0$ konzentrierte Wellenfunktionen. Für große Relativimpulse zeigen die Funktionen $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ und entsprechend $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ ein unterschiedliches asymptotisches Verhalten.

Die Vernachlässigung von richtungs- und spinabhängigen Termen führte dazu, daß wir für die beiden Bindungszustände TT und $T\bar{T}$ identische Gleichungen und damit auch gleiche Massen erhalten. Da in der Arbeit von HORNUNG <54> der $T\bar{T}$-Sektor unter Berücksichtigung von richtungs- und spinabhängigen Termen untersucht wird, sollten die dort gewonnenen Ergebnisse auch eine Aussage über die Gültigkeit der von uns verwendeten Näherung gestatten.
Für die Weiterentwicklung der dargestellten Theorie ist darüberhinaus die Arbeit von LAUXMANN <55>, welche den Dreiteilchen-Sektor des Modells zum Thema hat, von besonderem Interesse. Wir haben im Zweiteilchenfall gesehen, daß die endliche Kopplungskonstante nur in einem sehr kleinen Bereich beobachtbare Teilchen mit realistischen Massen zuläßt. Finden wir dieses Verhalten auch im Dreiteilchenfall und überschneiden sich die

entsprechenden Bereiche der Kopplungskonstante nicht, so bedeutet dies, daß das Modell entweder beobachtbare Zweiteilchen-Zustände oder beobachtbare Dreiteilchen-Zustände gestattet. In diesem Fall bietet sich an, sämtliche (Elementar-)Teilchen als Bindungszustände von Dreipreonen-Clustern zu konstruieren, wie dies von ELBAZ <62> vorgeschlagen wurde. Dies bedeutet den Anschluß der mikroskopischen Theorie an ein reichhaltiges phänomenologisches Modell.

ANHANG

A. Normierung von Diracspinoren. Formeln zu Abschnitt 4.4

Für die Diracmatrizen γ^μ, welche durch die AVR

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{A.1}$$

definiert sind, wählen wir die Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix} , \qquad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

mit den Paulischen Spinmatrizen

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \tag{A.3}$$

Die Diracgleichung für den vierkomponentigen Spinor
$\Psi(x) = \Psi_\alpha(x)$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\Psi(x) = 0 \tag{A.4}$$

hat die vier unabhängigen Lösungen

$$\Psi^j(x) = U^j(p)\, e^{-ipx} \qquad (j=1,..,4) \quad , \tag{A.5}$$

wobei die "Diracspinoren" $U^j(p)$ Lösungen der Diracgleichung im Impulsraum sind:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\, U^j(p) = 0 \tag{A.6}$$

Die vier Lösungen $U^j(p)$ zerfallen in zwei Lösungen zu positiver Energie $p_0 > 0$, die wir wie in der Literatur üblich mit

$$u(p,s) \qquad (s=1,2) \tag{A.7}$$

bezeichnen, und in zwei Lösungen zu negativer Energie $p_0 < 0$, diese bezeichnen wir mit

$$v(p,s) \qquad (s=1,2) \; . \tag{A.8}$$

Bei gegebener Masse m können wir hier und im folgenden stets p durch $\vec{p}$ ersetzen, jedoch werden wir die einfachere Bezeichnung p beibehalten.
Die explizite Gestalt für u und v ist durch

$$u(p,s) = N_p \begin{bmatrix} \hat{e}_s \\ \frac{-\sigma^i p_i}{E_p + m}\, \hat{e}_s \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

und

$$v(p,s) = N_p \begin{bmatrix} \frac{\sigma^i p_i}{E_p + m}\, \hat{e}_s \\ \hat{e}_s \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

gegeben. Die beiden Vektoren $\hat{e}_s$ (s=1,2) sind die Einheitsvektoren

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

des $\mathbb{R}^2$.

In Abweichung von der Standardliteratur führen wir im Falle von v(p,s) keine Umdefinition von p durch und bezeichnen stattdessen mit

$$E_p := +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0 \tag{A.12}$$

stets die positive Energie, so daß für u(p,s)

$$E_p = p_0$$

und für v(p,s)

$$E_p = -p_0$$

gilt.
Ebenfalls in Abweichung von vielen Darstellungen ist der Normierungsfaktor

$$N_p := \left(\frac{E_p + m}{2E_p}\right)^{1/2} \tag{A.13}$$

so gewählt, daß die Spinoren u und v die Gleichungen

$$u_\alpha^+(p,s)\; u_\alpha(p,s') = v_\alpha^+(p,s)\; v_\alpha(p,s') = \delta_{ss'}$$

$$u_\alpha^+(p,s)\; v_\alpha(p,s') = 0 \tag{A.14}$$

und

$$\bar{u}_\alpha(p,s)\; u_\alpha(p,s') = \frac{m}{E_p}\,\delta_{ss'}$$

$$\bar{v}_\alpha(p,s)\; v_\alpha(p,s') = -\frac{m}{E_p}\,\delta_{ss'} \tag{A.15}$$

erfüllen. Diese Normierung wird unter anderem von LURIE <57> und EISELE <58> verwendet.
$\bar{u}(p,s)$ und $\bar{v}(p,s)$ sind hierbei durch

$$\begin{aligned}\bar{u}(p,s) &= u^+(p,s)\,\gamma^0 \\ &= N_p\left({}^t\hat{e}_s \;,\; \frac{1}{E_p+m}\,{}^t\hat{e}_s\,\sigma^i p_i\right)\end{aligned} \tag{A.16}$$

und

$$\bar{v}(p,s) = N_p\left(\frac{1}{E_p+m}\,{}^t\hat{e}_s\,\sigma^i p_i \;,\; {}^t\hat{e}_s\right) \tag{A.17}$$

gegeben mit ${}^t\vec{e}_1 = (1,0)$ und ${}^t\vec{e}_2 = (0,1)$.

Abschließend folgen noch einige Formeln für Skalarprodukte, die leicht zu berechnen sind, und die wir in Abschnitt 4.4 benötigen:

$$u^+_\alpha(p,s)\; u_\alpha(p',s') = N_p N_{p'} \left\{ \delta_{ss'} + \frac{1}{(E_p+m)(E_{p'}+m)} \left(\vec{p}\vec{p}'\delta_{ss'} + i\vec{\sigma}_{ss'}(\vec{p}\times\vec{p}') \right) \right\} \tag{A.18}$$

$$\overline{u}_\alpha(p,s)\; u_\alpha(p',s') = N_p N_{p'} \left\{ \delta_{ss'} - \frac{1}{(E_p+m)(E_{p'}+m')} \left(\vec{p}\vec{p}'\delta_{ss'} + i\vec{\sigma}_{ss'}(\vec{p}\times\vec{p}') \right) \right\} \tag{A.19}$$

$$u^+_\alpha(p,s)\; \dot{\gamma}^i_{\alpha\beta}\, p_i\; u_\beta(p',s') = N_p N_{p'} \left\{ \frac{1}{E_p+m}\vec{p}^2\delta_{ss'} - \frac{1}{E_{p'}+m} \left(\vec{p}\vec{p}'\delta_{ss'} + i\vec{\sigma}_{ss'}(\vec{p}\times\vec{p}') \right) \right\} \tag{A.20}$$

Hier wurde stets ausgenützt, daß für die Paulimatrizen $\vec{\sigma} = (\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$ und zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})\;(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\,I_2 + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

gilt.

B. Zweipunktfunktion

Die Zweipunktfunktion der freien Theorie

$$F_{I_1 I_2} = F_{Z_1 Z_2}(x_1, x_2)$$
$$:= \langle 0 | T \Psi^f_{Z_1}(x_1) \Psi^f_{Z_2}(x_2) | 0 \rangle \qquad (B.1)$$

genügt nach (3.34) der Gleichung

$$\left(D^{\mu}_{Z Z_1} \frac{\partial}{\partial x_1^{\mu}} - M_{Z Z_1} \right) F_{Z_1 Z_2}(x_1, x_2)$$
$$= D^{0}_{Z Z_1} A_{Z_1 Z_2} \delta(x_1 - x_2) \quad , \qquad (B.2)$$

sie ist (bis auf Faktoren) eine Greenfunktion und nur von der Differenz $x = x_1 - x_2$ abhängig.
Aufgrund der gleichzeitigen AVR (2.59), die auch für die freien Feldoperatoren gelten, ist $F_{I_1 I_2}$ antidiagonal in den Superspinindizes Λ_1 und Λ_2 <37,S.115>

$$F_{A_1 i_1 \Lambda_1 \alpha_1, A_2 i_2 \Lambda_2 \alpha_2}(x_1 - x_2)\big|_{\Lambda_1 = \Lambda_2} = 0 \quad , \qquad (B.3)$$

und der T-Operator führt zur Antisymmetrie von F bei Vertauschung von I_1 und I_2

$$F_{I_1 I_2} = -F_{I_2 I_1} \quad . \qquad (B.4)$$

Wie die τ-Funktionen ist F an der Stelle $x_1^0 = x_2^0$, das heißt für $t = x_1^0 - x_2^0 = 0$ nicht definiert, und wir erhalten verschiedene Ergebnisse für die Grenzwerte

$$\lim_{t \to +0} F(x) \quad \text{und} \quad \lim_{t \to -0} F(x).$$

Auch hier legen wir den Funktionswert dadurch fest, daß wir Antisymmetrie bei Vertauschung der restlichen Indizes und Variablen fordern.
Nach (B.3) und (B.4) genügt es, F(x) für $\Lambda_1=1$ und $\Lambda_2=2$ zu berechnen.
Aus (B.2) erhalten wir hierfür

$$\left(i\gamma^{\mu}_{\alpha\alpha_1}\,\partial_{\mu} - m_{A_1 i_1}\,\delta_{\alpha\alpha_1} \right) F_{A_1 i_1 1\alpha_1,\, A_2 i_2 2\alpha_2}(x)$$

$$= i\,\frac{1}{2\Delta m_{A_1 i_1}}\,\delta_{A_1 A_2}\,\delta_{i_1 i_2}\,\gamma^{0}_{\alpha\alpha_2}\,\delta(x)\quad , \tag{B.5}$$

und Fouriertransformation ergibt mit

$$F_{z_1 z_2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dp\; e^{-ip_{\mu}x^{\mu}}\; F_{z_1 z_2}(p) \tag{B.6}$$

die folgende Gleichung für F(p):

$$F_{A_1 i_1 1\alpha_1,\, A_2 i_2 2\alpha_2}(p) = -i\,\frac{1}{2\Delta m_{A_1 i_1}}\,\delta_{A_1 A_2}\,\delta_{i_1 i_2}\,\frac{\{\gamma^{\mu}p_{\mu} + m_{A_1 i_1}\}_{\alpha_1\alpha}\cdot\gamma^{0}_{\alpha\alpha_2}}{m^2_{A_1 i_1} - p^2} \tag{B.7}$$

F(p) ist ebenfalls antisymmetrisch

$$F_{z_1 z_2}(p) = -F_{z_2 z_1}(-p)\quad , \tag{B.8}$$

und mit (B.6) gilt

$$F_{A_1 i_1 1\alpha_1,\, A_2 i_2 2\alpha_2}(x) = -i\,\frac{1}{2\Delta m_{A_1 i_1}}\,\delta_{A_1 A_2}\,\delta_{i_1 i_2}\;S^{c}_{\alpha_1\alpha}(x)\,\gamma^{0}_{\alpha\alpha_2}\quad , \tag{B.9}$$

wo

$$S^{c}_{\alpha_1\alpha}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dp\,\frac{\{\gamma^{\mu}p_{\mu} + m_{A_1 i_1}\}_{\alpha_1\alpha}}{m^2_{A_1 i_1} - p^2 - i\varepsilon}\;e^{-ipx} \tag{B.10}$$

die kausale Greenfunktion des Diracfeldes zur Masse $m_{A_1 i_1}$ ist. Eine explizite Darstellung der kausalen Greenfunktion $D^c(x)$ des skalaren Feldes ist in <56,S.150> angegeben, und wir erhalten die entsprechende Darstellung für $S^c(x)$ durch

$$S^c(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m_{A_1 i_1})\, D^c(x) \,. \tag{B.11}$$

Für die Rechnungen in Kapitel 4 benötigen wir die Fouriertransformierte von $F_{Z_1 Z_2}(x)|_{x_0=0}$, und deshalb führen wir in (B.10) die p_0-Integration durch und gehen dann zu $S^c(x)|_{x_0=0}$ beziehungsweise $F(x)|_{x_0=0}$ über.

Mittels Residuenintegration erhalten wir

$$S^c_{\alpha\beta}(x) = \Theta(x_0)\frac{i}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2}\int d\vec{p}\,\left\{\gamma^0 + \frac{\gamma^i p_i + m_{A_1 i_1}}{E_{\vec{p}}}\right\}_{\alpha\beta} e^{i\vec{p}\vec{x}}\, e^{-iE_{\vec{p}}x_0}$$

$$+\,\Theta(-x_0)\frac{i}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2}\int d\vec{p}\,\left\{-\gamma^0 + \frac{\gamma^i p_i + m_{A_1 i_1}}{E_{\vec{p}}}\right\}_{\alpha\beta} e^{i\vec{p}\vec{x}}\, e^{+iE_{\vec{p}}x_0} \,. \tag{B.12}$$

Hierbei ist (vgl. auch Anhang A)

$$E_{\vec{p}} := \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2_{A_1 i_1}} \tag{B.13}$$

und $\Theta(x_0)$ ist die Stufenfunktion

$$\Theta(x_0) = \begin{cases} 1 & x_0 > 0 \\ 0 & x_0 < 0 \end{cases} \,. \tag{B.14}$$

Die Zweipunktfunktion der Theorie lautet dann

$$F_{A_1 i_1 1 \alpha_1 , A_2 i_2 2 \alpha_2}$$

$$= \frac{1}{4\Delta m_{A_1 i_1}} \delta_{A_1 A_2} \delta_{i_1 i_2} \left[\Theta(x_0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\hat{p} \left\{ \gamma_0 + \frac{\gamma^i p_i + m_{A_1 i_1}}{E_{\hat{p}}} \right\}_{\alpha_1 \alpha} e^{i\hat{p}\vec{x}} e^{-iE_{\hat{p}} x_0} \right.$$

$$\left. + \Theta(-x_0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\hat{p} \left\{ -\gamma_0 + \frac{\gamma^i p_i + m_{A_1 i_1}}{E_{\hat{p}}} \right\}_{\alpha_1 \alpha} e^{i\hat{p}\vec{x}} e^{+iE_{\hat{p}} x_0} \right] \gamma^0_{\alpha \alpha_2} \quad , \tag{B.15}$$

und wir sehen, daß wir für $\lim_{x_0 \to \pm 0} F(x)$ zwei verschiedene Werte erhalten, nämlich

$$\frac{1}{4\Delta m_{A_1 i_1}} \delta_{A_1 A_2} \delta_{i_1 i_2} \left[\pm \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta(\vec{x}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\hat{p} \frac{(\gamma^i p_i + m_{A_1 i_1})_{\alpha_1 \alpha} \gamma^0_{\alpha \alpha_2}}{E_{\hat{p}}} e^{i\hat{p}\vec{x}} \right] . \tag{B.16}$$

Die Forderung, daß auch $F(x)|_{x_0=0}$ antisymmetrisch sein soll, führt mit

$$F(\vec{x}) := F(x)|_{x_0=0} := \frac{1}{2} \{ \lim_{t \to 0} F(t,\vec{x}) + \lim_{t \to 0} F(-t,\vec{x}) \}$$

zu dem Ergebnis

$$F_{A_1 i_1 1 \alpha_1 , A_2 i_2 2 \alpha_2}(\vec{x}) = \frac{1}{4\Delta m_{A_1 i_1}} \delta_{A_1 A_2} \delta_{i_1 i_2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\hat{p} \frac{(\gamma^i p_i + m_{A_1 i_1})_{\alpha_1 \alpha} \gamma^0_{\alpha \alpha_2}}{E_{\hat{p}}} e^{i\hat{p}\vec{x}} . \tag{B.17}$$

Für die in (4.28) definierten Funktionen $F^{\pm}$ erhalten wir mit $\Delta m_{A_1 1} = -\Delta m_{A_1 2} = m_{A_1}$

$$F^{\pm}_{A_1 1 \alpha_1, A_2 2 \alpha_2}(\vec{x}) := \frac{1}{2}\left\{F_{A_1 1 \alpha_1, A_2 1 2 \alpha_2}(\vec{x}) \mp F_{A_1 2 1 \alpha_1, A_2 2 2 \alpha_2}(\vec{x})\right\}$$

$$= \frac{1}{8 m_{A_1}} \delta_{A_1 A_2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p}\; e^{i\vec{p}\vec{x}} \left[\frac{(\gamma^i p_i + m_{A_1 1})_{\alpha_1 \alpha}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2_{A_1 1}}} \mp \frac{(\gamma^i p_i + m_{A_1 2})_{\alpha_1 \alpha}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2_{A_1 2}}}\right] \gamma^0_{\alpha \alpha_2} \,, \tag{B.18}$$

und mit den Definitionen

$$F_1^{\pm}(\vec{p}^2) := \frac{1}{(\vec{p}^2 + m^2_{A_1 1})^{1/2}} \mp \frac{1}{(\vec{p}^2 + m^2_{A_1 2})^{1/2}} \tag{B.19}$$

und

$$F_2^{\pm}(\vec{p}^2) := \frac{m_{A_1 1}}{(\vec{p}^2 + m^2_{A_1 1})^{1/2}} \mp \frac{m_{A_1 2}}{(\vec{p}^2 + m^2_{A_1 2})^{1/2}} \tag{B.20}$$

wollen wir als Ergebnis

$$F^{\pm}_{A_1 1 \alpha_1, A_2 2 \alpha_2}(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{8 m_{A_1}} \delta_{A_1 A_2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p}\; e^{i\vec{p}\vec{x}} \left\{F_1^{\pm}(\vec{p}^2)\, \gamma^i_{\alpha_1 \alpha} p_i \gamma^0_{\alpha \alpha_2} + F_2^{\pm}(\vec{p}^2)\, \gamma^0_{\alpha_1 \alpha_2}\right\} \tag{B.21}$$

festhalten. Es ist zu beachten, daß in den Definitionen (B.19) und (B.20) das Minuszeichen zu F_1^+ beziehungsweise F_2^+ und das Pluszeichen zu F_1^- beziehungsweise F_2^- gehört.

Der Vollständigkeit halber geben wir noch das Resultat für den Fall $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (2,1)$ an, welches man nach analoger Rechnung oder mit (B.4) erhält:

$$F^{\pm}_{A_1 2 \alpha_1 ; A_2 1 \alpha_2}(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{8 m_{\tilde{A}_1}} \delta_{A_1 A_2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p}\; e^{i\hat{p}\hat{x}} \left\{ F_1^{\pm}(\vec{p}^2)\, \gamma^{i}_{\alpha_2 \alpha}\, p_i\, \gamma^{0}_{\alpha \alpha_1} - F_2^{\pm}(\vec{p}^2)\, \gamma^{0}_{\alpha_1 \alpha_2} \right\} \quad \text{(B.22)}$$

LITERATURVERZEICHNIS

<1> D. Großer, B. Hailer, L. Hornung, T. Lauxmann, H. Stumpf, Z. Naturforsch. 38a, 1056 (1983)

<2> H. Harari, Phys. Lett. 86B, 83 (1979)

<3> T. Hayashi, Y. Koide, S. Ogawa, Prog. Th. Phys. 39, 1372 (1968)

<4> T. Massam, A. Zichichi, Nuovo Cim. 43, 227 (1966)

<5> O. W. Greenberg, C. A. Nelson, Phys. Rev. D10, 2567 (1974)

<6> J. C. Pati, A. Salam, Phys. Rev. D10, 275 (1974)

<7> L. Lyons, An Introduction to the Possible Substructure of Quarks and Leptons, in: D. Wilkinson (ed), Progress in Particle and Nuclear Physics Vol. 10, Pergamon Press, Oxford 1983

<8> M. A. Shupe, Phys. Lett. 86B, 87 (1979)

<9> L. de Broglie, C. R. Acad. Sci. Paris 195, 862 (1932); 199, 813 (1934)

<10> E. Fermi, C. N. Yang, Phys. Rev. 76, 1739 (1949)

<11> W. Heisenberg, Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, Hirzel, Stuttgart 1967

<12> W. Heisenberg, Rev. Mod. Phys. 29, 269 (1957)

<13> F. Bopp, Ann. d. Phys. 38, 345 (1940)

<14> A. Landé, Phys. Rev. 60, 121 (1941)
A. Landé, L. H. Thomas, Phys. Rev. 60, 514 (1941); 65, 175 (1944)

<15> B. Podolski, Phys. Rev. 62, 68 (1942)
B. Podolski, C. Kikuchi, Phys. Rev. 65, 228 (1944)

<16> A. Pais, G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. 79, 145 (1950)

<17> K. Wildermuth, Z. Naturforsch. 5a, 373 (1950)

<18> K. L. Nagy, State Vector Spaces with Indefinite Metric in Quantum Field Theory, Akadémiai Kiadó, Budapest und P. Noordhoff, Groningen 1966

<19> H. Stumpf, Physica 114A, 184 (1982)

<20> D. Großer, T. Lauxmann, J. Phys. G.: Nucl. Phys. 8, 1505 (1982)

<21> H. Stumpf, Z. Naturforsch. 39a, 441 (1984)

<22> H. Stumpf, Z. Naturforsch. 37a, 1295 (1982)

<23> D. Großer, Z. Naturforsch. 38a, 1293 (1983)

<24a> H. Stumpf, Ann. d. Phys. 13, 294 (1964)

<24b> H. Stumpf, Z. Naturforsch. 24a, 188 (1969)

<24c> H. Stumpf, Funktionale Quantentheorie, in: H. P. Dürr (Hrsg), Quanten und Felder, Vieweg, Braunschweig 1971

<24d> H. Stumpf, Acta Phys. Austr. Suppl. IX, 195 (1972)

<24e> H. Stumpf, New Representation Spaces of the Poincaré Group and Functional Quantum Theory, in: P. Kramer, M. Dal Cin (eds), Groups, Systems and Many-Body Physics, Vieweg, Braunschweig 1980

<25> K. Wildermuth, Y. C. Tang, A Unified Theory of the Nucleus, Vieweg, Braunschweig 1977

<26> P. Kramer, G. John, D. Schenzle, Group Theory and the Interaction of Composite Nucleon Systems, Vieweg, Braunschweig 1981

<27> D. Maison, H. Stumpf, Z. Naturforsch. 21a, 1829 (1966)

<28> H. Stumpf, Z. Naturforsch. 30a, 708 (1975)

<29> H. Stumpf, Z. Naturforsch. 36a, 1024 (1981)

<30> H. Stumpf, Z. Naturforsch. 38a, 1064 (1983); 38a, 1184 (1983)

<31> H. Stumpf, Z. Naturforsch. 40a, 14 (1985); 40a, 183 (1985); 40a, 294 (1985)

<32> W. Heisenberg, W. Pauli, On the Isospin Group in the Theory of Elementary Particles, Preprint 1958; unveröffentlicht

<33> W. Heisenberg, Research on the Non-linear Spinor Theory with Indefinite Metric in Hilbert Space, in: B. Ferretti (ed), Proceedings of the Annual International Conference on High Energy Physics, CERN, Genf 1958

<34> H. P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder, K. Yamazaki, Z. Naturforsch. 14a, 441 (1959)

<35> H. P. Dürr, Z. Naturforsch. 16a, 327 (1961)

<36> H. Harari, N. Seiberg, Phys. Lett. 98B, 269 (1981)
H. Harari, N. Seiberg, Nucl. Phys. B204, 141 (1982)

<37> P. Roman, Introduction to Quantum Field Theory, Wiley, New York 1969

<38> S. Gasiorowicz, Elementarteilchenphysik, Bibliographisches Institut, Mannheim 1975

<39> H. Stumpf, K. Scheerer, H. Märtl, Z. Naturforsch. 25a, 1556 (1970)

<40> H. Stumpf, Z. Naturforsch. 25a, 575 (1970)

<41> N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. 51, 1 (1972)

<42> J. Bognár, Indefinite Inner Product Spaces, Springer-Verlag, Berlin 1974

<43> V. Volterra, Sitzungsber. Berliner Math. Gesellsch. 13, 6 (1914)

<44> N. Wiener, Proc. Nat. Acad. Sci. 7, 294 (1921)

<45> V. A. Fock, Phys. Z. Sowjetunion 6, 245 (1934)

<46> R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20, 367 (1948)

<47> N. N. Bogoljubov, J. Phys. (USSR) 10, 265 (1946)

<48> E. Lux, A. Münster, Z. Phys. 199, 465 (1967)

<49> J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37, 452 (1951)

<50> H. Stumpf, Z. Naturforsch. 40, 752 (1985)

<51> H. Rampacher, H. Stumpf, F. Wagner, Fortschr. Phys. 13, 385 (1965)

<52> F. Coester, Phys. Rev. 95, 1318 (1954)
F. A. Berezin, The Method of Second Quantization, Academic Press, New York 1966
J. Rzewuski, Field Theory, Iliffe Books, London 1969

<53> E. Freese, Z. Naturforsch. 8a, 776 (1953)

<54> L. Hornung, Dissertation, Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen, in Vorbereitung

<55> T. Lauxmann, Dissertation, Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen, in Vorbereitung

<56> N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields, Wiley, New York 1980

<57> D. Lurié, Particles and Fields, Wiley, New York 1968

<58> J. A. Eisele, Modern Quantum Mechanics with Applications to Elementary Particle Physics, Wiley, New York 1969

<59> I. S. Gradshteyn, I. M. Ryshik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York 1965

<60> E. Wigner, Ann. Math. 40, 149 (1939)

<61> L. Fonda, G. C. Ghirardi, Symmetry Principles in Quantum Physics, Marcel Dekker, New York 1970

<62> E. Elbaz, Nuovo Cim. 63A, 257 (1981)

DANKSAGUNG

An erster Stelle danke ich Prof. Dr. H. Stumpf für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche und überaus fruchtbare Diskussionen.

Mein Dank gilt Prof. Dr. P. Kramer sowie Dr. habil. D. Großer und Dr. habil. G. John. Auch sie standen mir bei Fragen und Problemen stets hilfreich zur Seite.

Den beiden Diplomphysikern und Doktoranden L. Hornung und T. Lauxmann danke ich für anregende Diskussionen und Gespräche in freundlicher Atmosphäre.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung, die mir während eines Teils dieser Arbeit gewährt wurde.

Nicht zuletzt gilt mein Dank Uschi für das sorgfältige und mühevolle Tippen der Arbeit.

LEBENSLAUF

07.06.1955	geboren in Balingen
	Eltern: Josef Hailer, Maurermeister Paula Hailer, geb. Hahn
1962-1966	Besuch der Grundschule in Roßwangen
1966-1974	Besuch des Gymnasiums in Balingen
12.06.1974	Reifeprüfung am Gymnasium in Balingen
1974-1975	Grundwehrdienst
1975-1981	Studium der Physik und Mathematik (Staatsexamen) an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
31.03.1977	Zwischenprüfung Physik
30.09.1977	Zwischenprüfung Mathematik
1979	Anfertigung der Wissenschaftlichen Arbeit "Anwendungen der zweidimensionalen unitären Gruppe auf die Dynamik physikalischer Systeme" unter Anleitung von Prof. Dr. P. Kramer
14.10.1980	Staatsexamen Physik
20.05.1981	Staatsexamen Mathematik
1981-1985	Anfertigung der Dissertation "Norm- und Massenberechnung skalarer Bosonen als Bindungszustände in einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldmodellen" unter Anleitung von Prof. Dr. H. Stumpf am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen
	zeitweise Wissenschaftliche Hilfskraft am Fachbereich Mathematik und am Institut für Theoretische Physik bzw. freier Mitarbeiter in der Software-Entwicklung

Akademische Lehrer:

in der Physik:

Baumann, Elwert, Fäßler, Gönnenwein, Großer, Hartmann, Hübener, John, Klink, Kramer, Krüger, Lutz, Mack, Mertens, Möllenstedt, Müther, Pfister, Rex, Rieckers, Schief, Schramm, Schwenk, Staudt, Stumpf, Wahl, Wildermuth

in der Mathematik:

Beekmann, Betsch, Felscher, Grölz, Hähl, Kaul, Kaup, Salzmann, Schaefer, P. Schmid, Schönhage, Tamaschke, A. Wolf, M. Wolff